县（市，区）________ 姓名________ 考生号________ 座位号________

装 订 线

2017年河南省普通高等学校

选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷

高等数学模拟题（一）

说明：考试时间120分钟，试卷共150分。

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

一、单项选择题（每小题2分，共60分。在每个小题的备选答案中选出一个正确答案，并将其代码写在题干后的括号内。）

1. 函数 $f(x)=\arcsin\frac{x-3}{2}-\ln(4-x)$ 定义域为（ ）

A. $[1,4)$　　B. $[1,5]$　　C. $[-2,2]$　　D. $[0,4]$

2. 下列函数中为奇函数的是( )

A. $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\sin^2 x$　　B. $f(x)=x\tan x-\cos x$

C. $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$　　D. $f(x)=\frac{x}{1-x}$

3. 已知 $f\left(e^{-x}-1\right)=\frac{e^x}{1-e^x}$，则 $f(x)=$（ ）

A. $-\frac{1}{x}$　　B. $-x$　　C. $x-1$　　D. $\frac{1}{x}$

4. 当 $x\to 0$ 时，下列是无穷小量的是（ ）

A. $\sin\frac{1}{x}$　　B. $\frac{\sin x}{x}$

C. x^x　　D. $(3x^3-3x)\sin\frac{2}{x}$

5. 设 $f(x)=\frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$，则下列说法正确的是（ ）

A. $x=1$ 为无穷间断点

B. $x=1,x=2$ 都是无穷间断点

C. $x=2$ 是可去间断点

D. $x=1$ 为可去间断点，$x=2$ 为无穷间断点

6. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^x=e^3$，则 $a=$（ ）

A. 3　　B. -3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

7. 下列方程在 $[0,1]$ 有实根的有（ ）

A. $\sin x+x-\frac{1}{2}=0$　　B. $x^2+3x+1=0$

C. $\arcsin x+3=0$　　D. $x-\sin x+\frac{1}{2}=0$

8. 设 $f(x)$ 是可导函数，且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=1$，则 $f'(x_0)=$（ ）

A. 1　　B. 0　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

9. 曲线 $x^2y+\ln y=1$ 在点 $(1,1)$ 处的切线斜率是（ ）

A. -2　　B. -1　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 0

10. 下列函数在 $x=0$ 处可导的是（ ）

A. $y=|3\sin x|$　　B. $y=3\ln x$　　C. $y=|5x|$　　D. $y=|6\cos x|$

11. 函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2te^t+1,\\ y=t^3-3t.\end{cases}$ 确定，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$=( )

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{3}{8}e^2$　　D. $\frac{3}{8}e$

12. $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的（ ）条件.

A. 充分　　B. 必要　　C. 充分必要　　D. 以上都不对

13. 已知 $y=\cos x$，则 $y^{(8)}=$（ ）

A. $\sin x$　　B. $\cos x$　　C. $-\sin x$　　D. $-\cos x$

14. 下列说法正确的是（　）

A.函数的极值点一定是函数的驻点　　B.函数的驻点一定是函数的极值点

C.二阶导数非零的驻点一定是极值点　　D.以上说法都不对

15. 当$x>x_0$时，$f''(x)>0$　；当$x>x_0$时，$f''(x)<0$，则下列结论正确的是（　）

A. 点x_0是函数$f(x)$的极小值点

B. 点x_0是函数$f(x)$的极大值点

C. 点（x_0，$f(x_0)$）必是曲线$y=f(x)$的拐点

D. 点x_0不一定是曲线$y=f(x)$的拐点

16. 曲线$y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$的渐近线条数为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

17. 下列等式中正确的是（　）

A. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$　　B. $\int f'(x)dx=f(x)$

C. $\int df(x)=f(x)$　　D. $d\int f(x)dx=f(x)$

18. 若函数$f(x)$满足$df(x)=-2xe^{-x^2}dx$，则$f(x)=$（　）

A. e^{-x^2}　　B. $e^{-x^2}+C$　　C. $2e^{-x^2}+C$　　D. $-e^{-x^2}+C$

19. 由曲线$y=\sin x(0\le x\le\pi)$ 与x轴所围成的区域的面积为（　）

A. 0　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. π

20. 设$\int_{-1}^{1}x^3\cos xdx=$　（　）

A. 2　　B. 1　　C. 2　　D. 0

21.设$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$是基本单位向量，则$\vec{i}\times\vec{k}=$（　）

A. $\vec{j}$　　B. $-\vec{j}$　　C. 1　　D. -1

22. 设y_1,y_2是$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的两个解,则$y=c_1y_1+c_2y_2$（c_1,c_2为任意常数）（　）

A.通解　　B.解　　C.特解　　D.不一定是解

23. 二阶常系数非齐次线性方程的解法$y''-y'=e^x+1$的特解形式为（　）

A. Ae^x+B　　B. Axe^x+B

C. Ae^x+Bx　　D. Axe^x+Bx

24. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=$（　）

A.0　　B.1　　C. a　　D.不存在

25. 设函数$z=x^y(x>0)$，则$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$　（　）

A. yx^{y-1}　　B. $x^y\ln x$　　C. $x^y\ln y$　　D. x^y

26. 设积分区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le2x\}$，则$\iint\limits_D ydxdy=$（　）

A. 0　　B. π　　C. 1　　D. 2π

27. 交换积分顺序后，$\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy=$（　）

A. $\int_1^e dy\int_0^{\ln x}f(x,y)dx$　　B. $\int_0^{\ln x}dy\int_1^e f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$　　D. $\int_{e^y}^e dy\int_0^1 f(x,y)dx$

28. 设$I=\int\limits_L xds$，其中，L是抛物线$y^2=\dfrac{x^2}{2}$上点$(0,0)$与点$\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$之间的一段弧，则$I=$（　）

A.1　　B. $\dfrac{1}{3}$（$2\sqrt{2}-1$）　　C.0　　D. $2\sqrt{2}-1$

29. 下列级数绝对收敛的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$

30. 已知：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$，则$\frac{1}{1-x^2}$的幂级数展开式为（　　）

A. $1+x^2+x^4+\cdots$　　B. $-1+x^2-x^4+\cdots$

C. $-1-x^2-x^4-\cdots$　　D. $1-x^2+x^4-\cdots$

二、填空题 （每空 2 分，共 20 分）

31. 函数 $y=3^x-1$ 的反函数是________.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

33. 若 $f(x)=\frac{e^x-a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，则 $a=$________

34. 函数 $y=x-\ln\left(x+1\right)$ 的单调减少区间为________.

35. $\int\ln\left(x+1\right)dx=$________.

36. 定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin x+1}{1+x^2}dx=$________.

37. 向量 $3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ 的模等于________.

38. 微分方程 $y''-4y'+5y=0$ 的通解为________.

39. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $zxy+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的隐函数，则 $z'_y\big|_{(1,0,-1)}=$________.

40. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的收敛区间为________.

三、计算题 （每小题 5 分，共 50 分）

41. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

42. 设 $y=f\left(x\right)$ 是由方程 $y=1+xe^y$ 确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx}$.

43. 求不定积分 $\int\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$；

44. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2, x>1\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

45. 求过点 $A\left(0,2,4\right)$ 且与两平面 $\pi_1: x+2z=0$ 和 $\pi_2: y-3z=2$ 平行的直线.

46. 求二元函数$f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$的极值.

47. 求一阶线性微分方程$xy'-y=x^3$的通解.

48. 计算$\iint\limits_D\left(\frac{x}{y}\right)^2dxdy$，$D$为由$xy=1$，$y=x$，$x=2$所围成的区域.

49.计算曲线积分$\int_L(2x+2y)dx+(2x+y)dy$，其中L是沿曲线$y=\sin\frac{\pi x}{2}$由点$(0,0)$到点$(1,1)$。

50.将$f(x)=\ln x$在$x=2$处展开为幂级数.

四、应用题 （每小题 7 分，共 14 分）

51. 已知某制造商的生产函数为$f(x,y)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$，式中$x$代表劳动力的数量，$y$为资本数量。每个劳动力与每单位资本的成本分别是 150 元和 250 元。该制造商的总预算为 50000 元。问他该如何分配这笔钱于雇佣劳动力和资本，以使生成量最高。

52. 平面图形 D 由曲线$y=\sqrt{x}$，直线$y=x-2$及x轴所围成.

（1）求此平面图形的面积;

（2）此平面图形绕x轴旋转一周所成的旋转体的体积.

五、证明题(6 分)

53. 证明不等式.当$x>1$时，$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$

县（市、区）________ 姓名________ 考生号________ 座位号________

装 订 线

2017年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷
高等数学模拟题（二）

说明：考试时间120分钟，试卷共150分。

题 号	一	二	三	四	五	总 分
分 数						

一、单项选择题（每小题2分，共60分。在每个小题的备选答案中选出一个正确答案，并将其代码写在题干后的括号内。）

1. 设 $f(x)$ 为奇函数,则 $F(x)=f(x)\left(3^{-x}-3^{x}\right)$ 为（ ）

A.偶函数　　B.奇函数　　C.非奇非偶函数　　D.无法确定

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2}}{n}$ 极限的值是（　）

A.1　　B.-1　　C.0　　D.不存在

3. 下列函数中，当 $x\to 0$ 时，比无穷小量 x 高阶的无穷小量是（ ）

A. $\sin x$　　B. $x+x^2$　　C. $2x$　　D. $1-\cos x$

4.当 $x\to 0$ 时，e^x-ax^2-x-1 是 x^2 的高阶无穷小量，则 $a=$（　）

A. 1　　B. -1 ；　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

5. 设 $f(\sin x)=\cos x,|x|\le\frac{\pi}{2}$, 则 $f(x)=$　（ ）

A. $-\sqrt{1-x^2}$　　B. $\arccos x$　　C. $\sqrt{1-x^2}$　　D. $\arcsin x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)=$（　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. ∞

7. 设函数 $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$ ，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　）

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点
C. 连续点　　D. 第二类间断点

8.已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导，且 $f(0)<0$ ，$f'(x)>0,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，则方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内（　）

A.没有根　　B.至少存在一个根　　C.有唯一根　　D.不能确定有根

9. 设 $f(x)$ 为可导函数且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则 $f'(1)=$（　）

A. 2　　B. －1　　C. 1　　D. －2

10. 过曲线 $y=xy+1$ 上点 $(0,1)$ 处的切线方程是(　)

A. $y-1=x$　　B. $y=x-1$

C. $y=-x+1$　　D. $y=-x-1$

11. 设 $xy-xe^{y^2}-x=-2$，则当 $x=1,y=0$ 时，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=$（　）

A. 2　　B. -1　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

12. 设五次方程 $a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0$ 有五个不同的实根，则方程 $5a_0x^4+4a_1x^3+3a_2x^2+2a_3x+a_4=0$ 最多有（　）实根.

A. 5个　　B. 4个　　C. 3个　　D. 2个

13. 设 $f(x)=(1+x)e^x$，则 $f(x)$（ ）

A.有极小值　　B.有极大值　　C.无极值　　D.不能确定有无极值

14. 函数 $y=2+e^{\frac{1}{x}}$（　）

A. 只有水平渐近线　　B. 只有垂直渐近线

C. 既有水平又有垂直渐近线　　D. 无渐近线

15. 下列式子正确的是（　）

A. $\int df(x)=f(x)$　　B. $d\int df(x)=f(x)+C$

C. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)dx$　　D. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

16. 设 $f(x)$ 的导函数是 $e^{-x}+\cos x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　）

A. $-e^{-x}+\sin x$　B. $e^{-x}-\cos x$　C. $-e^{-x}-\cos x$　D. $e^{-x}+\sin x$

17. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx =$（　）

A. 0　B. $2\left(\frac{1}{e}-1\right)$　C. $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$　D. $e+1$

18. 设区域 D 由 $x=a,x=b(b>a)$，$y=f(x),y=g(x)$，则区域 D 的面积为（　）

A. $\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$　　B. $\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]dx\right|$

C. $\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$　　D. $\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$

19. 已知 $\int_1^x f(t^2)dt = x^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=$（　）

A. 1　B. 2　C. 3　D. 0.

20. 设 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^p}dx$ 收敛，则 p 满足（　）

A. $p>1$　B. $p\le 1$　C. $p\ge 1$　D. $p<-1$

21.设向量 $\vec{a}=\{1,-1,-1\},\vec{b}=\{2,1,-1\}$，$\lambda$ 为非零常数,若 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp\vec{a}$,则 λ 等于（　）

A. $-\frac{3}{2}$　B. $\frac{3}{2}$　C. $-\frac{2}{3}$　D. $\frac{2}{3}$

22. 微分方程 $xy'+\frac{x^2}{1+x^2}y-1=0$ 是（　）

A. 齐次微分方程　　B. 一阶线性非齐次微分方程

C. 可分离变量微分方程　　D. 一阶线性齐次微分方程

23. 微分方程 $x\cdot y'+y=\cos x$ 的一个特解是（　）

A. $\sin x$　B. $\cos x$　C. $\frac{\sin x}{x}$　D. $\frac{\cos x}{x}$

24. 要使函数 $f(x,y)=\frac{2-\sqrt{x^2+y^2+4}}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处连续，应补充定义 $f(0,0)=$（　）

A. 0　B. 4　C. $\frac{1}{4}$　D. $-\frac{1}{4}$

25. 函数 $f(x,y)=x^2+y^2-2x-2y+1$ 的驻点是（　）

A. $(0,0)$　B. $(0,1)$　C. $(1,0)$　D. $(1,1)$

26. 区域 D 由直线 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=5a$ 围成，则 $\iint\limits_D dxdy=$（　）

A. $4a^2$　B. 5　C. $5a^2$　D. 4

27. 交换 $\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}f(x,y)dy$ 积分次序后积分变为（　）

A. $\int_0^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$；

B. $\int_{-1}^{2}dy\int_{x^2}^{x+2}f(x,y)dx$；

C. $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$；

D. $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{\sqrt{y}}^{y-2}f(x,y)dx$；

28. 设 L 是点 $A(1,0)$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段，则 $\int_L e^{x^2}\sin y dx+x^3 y dy=$（　）

A. $e-1$　B. 2　C. 4　D. 0

29. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数中收敛的是（　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{10}$　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+10)$　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10}{u_n}$　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-10)$

30. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$ 的和函数为（　）

A. e^x　　B. $e^{2x}-1$　　C. e^{2x}　　D. $2e^x$

二、填空题（每空 2 分，共 20 分）

31.已知函数 $f(x)$ 的定义域为[1,2]，则 $f(1-\ln x)$ 的定义域为________.

32. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x},x<0\\ x+a,x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 有极限，则 $a=$________.

33. 设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 $dy=$________.

34. 如果函数 $f(x)$ 在点 a 处可导，且 $f(a)$ 为 $f(x)$ 的极大值，则 $f'(a)=$________.

35. 设 $\int f(x)dx=2^x+\cos x+C$，则 $f(x)=$________.

36. 设 $f(2)=1,\int_0^2 f(x)dx=1$，则 $\int_0^2 xf'(x)dx=$________.

37. 直线 $\begin{cases}2x-3y-1=0\\ x+y-2z-2=0\end{cases}$ 的方向向量为________.

38. 以 $y=e^{2x},y=xe^{2x}$ 为特解的二阶常系数线性齐次方程为________.

39. 设 $z=xy^x$，则 $dz|_{(1,1)}=$________.

40. $\dfrac{1}{2+x}$ 的麦克劳林级数是________.

三、计算题（每小题 5 分，共 50 分）

41. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{2}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi})$

42. $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ \sin t-y+1=0.\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$.

43. 求不定积分 $\int\dfrac{x^4}{1+x^2}dx$

44. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2,x\le 0\\ e^{-x},\quad x>0\end{cases}$,求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

45. 已知函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $e^{-xy}-2z+e^z=0$ 所确定，求 dz.

46. 求与平面 $\pi_1:x+y+z=0$ 垂直且过点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 的平面 π_2 方程

47. 求微分方程$\left(y^2-6x\right)y'+2y=0$的通解.

48. 求曲面$z=x^2+y^2$与$2x+4y-z=0$平行的切平面方程.

49. 求$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$,其中$D:0\le y\le x,x^2+y^2\le 2x$.

50. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$的和.

四、应用题 （每小题 7 分，共 14 分）

51. 求由抛物线$y=x^2-1$和直线$y=x+1$所围成的平面图形的面积.

52. 作一圆柱体体积为V，使其表面积最小，求圆柱体的底半径r与高h.

五、 证明题(6 分)

53. 设$f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上连续，在$\left(a,b\right)$内可导，且$f'\left(x\right)\le 0,F\left(x\right)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f\left(t\right)dt$，

求证：在$\left(a,b\right)$内，$F'\left(x\right)\le 0$。

县（市、区）＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 考生号＿＿＿＿ 座位号＿＿＿＿

装 订 线

2017年河南省普通高等学校

选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷

高等数学模拟题（三）

说明：考试时间120分钟，试卷共150分。

题号	一	二	三	四	五	总 分
分数						

一、单项选择题（每小题2分，共60分。在每个小题的备选答案中选出一个正确答案，并将其代码写在题干后的括号内。）

1. 设函数 $y=f(x)$ 是由 $y=\sqrt{1-u^2}$ 和 $u=\ln x$ 复合而成，则 $f(x)$ 的定义域是（ ）

A.（0，$+\infty$）　B.（$e^{-1},+\infty$）　C.(0，e)　D.$[e^{-1},e]$

2. 函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数是（ ）

A.奇函数　B.偶函数　C.非奇非偶函数　D.无法判断奇偶性

3. 当 $x\to0$ 时，下列为无穷小量的是(　)

A.2^x　B.$\sin\dfrac{1}{x}$　C.$\dfrac{\sin x}{x}$　D.$(x^3+x)\sin\dfrac{1}{x}$

4. 当 $x\to0$ 时,与 $\sqrt[3]{1+x}-1$ 等价的无穷小量为(　)

A.x　B.$\dfrac{x}{3}$　C.$3x$　D.$\dfrac{2x}{3}$

5. 点 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 的(　)

A.连续点　B.跳跃间断点　C.可去间断点　D.第二类间断点

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3ax}-1}{x} & x\neq0\\ 3 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 $a=$（　）

A.$\dfrac{1}{3}$　B.1　C.2　D.0

7.下列方程在区间(0, 1)内至少有一个实根的为（ ）

A.$x-2=0$　B.$\cos x=1-e$

C.$x\cdot2^x=1$　D.$x^2+1+\dfrac{1}{4}\arcsin x=0$

8. 设 $f'(0)=2$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{\ln(1+x)}=$（　）

A. 2　B. 1　C. 0　D. 4

9. 曲线 $\begin{cases}x=\sin2t,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应点处的切线方程为（　）

A. $x=1$　B. $y=1$　C. $y=x+1$　D. $y=x-1$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，则 $(f(x)+f(-x))'$ 一定是(　)

A.奇函数　B.偶函数

C.非奇非偶函数　D.不能确定奇偶性

11. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+\ln y=1$ 确定的隐函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$（　）

A. $-\dfrac{y^2}{xy+1}$　B. $-\dfrac{y}{xy+1}$　C. $\dfrac{y^2}{xy+1}$　D. $\dfrac{y}{xy+1}$

12. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $f'(x)\le0,f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内（　）

A.单调增加且是凸的　B.单调增加且是凹的

C.单调减少且是凸的　D.单调减少且是凹的

13.曲线 $y=\dfrac{x^2+2}{(x-2)^3}$ 的渐近线条数为（　）

A. 1　B. 2　C. 3　D. 0

14. 若$f'(x)=g'(x)$，则下列式子一定成立的有（　）

A. $f(x)=g(x)$　　B. $\int df(x)=\int dg(x)$

C. $\left(\int f(x)dx\right)'=\left(\int g(x)dx\right)'$　　D. $f(x)=g(x)+1$

15. 设$f(x)=e^{-x}$，则$\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=$（　）

A. $-\frac{1}{x}+C$　　B. $\frac{1}{x}+C$

C. $\ln x+C$　　D. $-\ln x+C$

16. $\left[\int f(\sin x)d\sin x\right]'=(\ )$

$A.f(\sin x)$　$B.\cos xf(\sin x)$　$C.\sin xf(\sin x)$　$D.-\cos f(\sin x)$

17. 已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$\int_1^3 f(t+1)dt=$（　）

A. $F(3)-F(1)$　　B. $F(t+1)-F(2)$

C. $F(4)-F(2)$　　D. $F(t)-F(1)$

18. 曲线$y=\cos x$与直线$y=1,x=\frac{\pi}{2}$所围成的平面图形的面积为（　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{2}-1$

19. 设$F(x)=\frac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，其中$f(x)$是连续函数，则$\lim\limits_{x\to a}F(x)=$（　）

A. a^2　　B. $a^2f(a)$　　C. 0　　D. 不存

20. 已知$\vec{a}$与$\vec{b}$都是非零向量，且满足$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$，则必有（　）

A. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$　　B. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$　　C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　　D. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

21. 直线$L:\begin{cases}x+3y+4=0,\\4y+z+7=0\end{cases}$与平面$\pi:6x-2y+8z-7=0$的位置关系是（　）

A. $L\,//\,\pi$　　B. L在π上

C. $L\perp\pi$　　D. L与π只有一个交点，但不垂直

22. 微分方程$xy'^2-2yy'+x=0$与$x^2y''-xy'+y=0$的阶数分别为（ ）

A. 1,1　　B. 1,2　　C. 2,1　　D. 2,2

23. 微分方程$y''-y'-2y=xe^{-x}$的特解形式为 ( )

A. $y^*=Axe^{-x}$　　B. $y^*=(Ax+B)e^{-x}$

C. $y^*=x(Ax+B)e^{-x}$　　D. $y^*=x^2(Ax+B)e^{-x}$

24. 设函数$z=\frac{1}{\sqrt{\ln(x+y)}}$的定义域是（　）

A. $x+y>0$　　B. $\ln(x+y)\neq 0$　　C. $x+y>1$　　D. $x+y\neq 1$

25. 函数$z=\ln\frac{2x}{y}$，则$dz|_{(1,2)}=$（　）

A. $\frac{y}{2x}dx$　　B. $\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$　　C. $dx-\frac{1}{2}dy$　　D. $dx+\frac{1}{2}dy$

26. 曲面$z=x^2+y^2$在点$(1,2,5)$处的切平面方程为（　）

A. $2x+4y-z=5$　　B. $4x+2y-z=5$

C. $x+2y-4z=5$　　D. $2x-4y+z=5$

27. 若$\int_0^1 dx\int_{x^2}^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^{\varphi(y)} f(x,y)dx$成立，则$\varphi(y)=$（　　）

A. y^2　　B. y　　C. $\sqrt{y}$　　D. $\sqrt[3]{y}$

28. 设L为沿圆周$x^2+y^2=2x$的上半部分和x轴闭区域边界正方向围成，

则$\oint_L 2e^x\sin ydx+(2e^x\cos y+x)dy=$(　)

A. π　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}\pi$　　D. 不存在

29. 下列四个级数中，发散的是（　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{1000n}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

30. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ 的和是（　）

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

二、填空题（每空 2 分，共 20 分）

31. 设 $f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x$，其中 $x\neq 0$，　则 $f(x)=$________.

32. 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+ax-6}{x-2}=3$，则 $a=$________.

33. 设 $y=y(x)$ 是由 $x^y=y^x$ 所确定的隐函数,则 $\frac{dy}{dx}=$________.

34. 函数 $f(x)=(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$，则 $f^{(4)}(x)=$________.

35. 设 e^{x^2} 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int e^{-x^2}f(x)dx=$________.

36. 平面 $\pi_1:2x+y+z-5=0$ 与 $\pi_2:x-3y+z=10$ 的夹角为________.

37. 微分方程 $xdy-3ydx=0$ 在 $y|_{x=1}=1$ 条件下的特解为________.

38. 设 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$，则 $f\left(\frac{y}{x},1\right)=$ ________.

39. 设积分区域 D 为 $x^2+y^2\leq 4y$，则 $\iint\limits_D dxdy=$________.

40. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$,当________时级数收敛,当________时级数发散.

三、计算题（每小题 5 分，共 50 分）

41. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

42. 求函数 $y=x^{5x}$ 的导数 y' 和微分 $\mathrm{d}y$.

43. 求不定积分 $\int\frac{1}{x^2+x-2}dx$

44. 求定积分 $\int_1^e\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

45. 求过两点 $A(1,-1,1)$ 和 $B(2,2,-1)$ 且与平面 $\pi:x+y-z=0$ 垂直的平面方程.

46.求微分方程$2y''+y'-y=3e^x$的通解

47. 设$z=x^3f\left(xy^2,\sin xy\right)$，其中$f$可微，求$dz$

48. 计算$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$， D为由直线$y=0$及圆$x^2+y^2=1$（的外部）和

$x^2+y^2-2x=0$围成的区域（$y\geq 0$）.

49. 将$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$展开为$x+4$的幂级数.

50. 试确定幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$的收敛域并求出和函数.

四、应用题 （每小题 7 分，共 14 分）

51. 平面图形D是由曲线$y=e^x$及直线$y=e$、y 轴所围成的，求：

（1）平面图形D的面积.

（2）平面图形D绕y轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

52. 某企业的生产成本函数是$y=f(x)=9000+40x+0.001x^2$，其中x表示产品的件数，求该企业生产多少件产品时，平均成本达到最小？

五、证明题(6 分)

53. 证明：$\left|\arctan b-\arctan a\right|\leq\left|b-a\right|$

县（市、区）__________ 姓名__________ 考生号__________ 座位号__________

装　　订　　线

2017年河南省普通高等学校

选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷

高等数学模拟题（四）

说明：考试时间120分钟，试卷共150分。

题号	一	二	三	四	五	总 分
分数						

一、单项选择题（每小题2分，共60分。在每个小题的备选答案中选出一个正确答案，并将其代码写在题干后的括号内。）

1.设函数 $f(2x+1)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(x)$ 的定义域是（　）

A. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$　　B. $[0,1]$　　C. $(-1,3)$　　D. $[1,3]$

2. 函数 $f(x)=x^3+\frac{\arctan x}{x}$ 是（　）

A.奇函数　　B.偶函数

C.非奇非偶函数　　D.既是奇函数又是偶函数

3. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中与 x^2 是同阶非等价的无穷小量是（　）

A. $x-\ln(1+x)$　　B. $x\sin x$　　C. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$　　D. e^x-1

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin x\right)=$（　）

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D.不存在

5. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=e^4$，则 $a=$（　）

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. 4

6. 对于函数 $y=\frac{x^2-9}{x(x-3)}$，下列结论中正确的是（　）

A. $x=0$ 是第一类间断点，$x=3$ 是第二类间断点；

B. $x=0$ 是第二类间断点，$x=3$ 是第一类间断点；

C. $x=0$ 是第一类间断点，$x=3$ 是第一类间断点；

D. $x=0$ 是第二类间断点，$x=3$ 是第二类间断点.

7.设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　）

A. 1　　B. -1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

8. 设 $f(x)=e^{x^2}$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(1+\Delta x)-f'(1)}{\Delta x}=$（　）

A. $4e$　　B. $2e$　　C. $6e$　　D. e^2

9. 曲线 $y=x\ln x$ 平行于直线 $x-y+1=0$ 的切线方程是（　）

A. $y=x-1$　　B. $y=-(x+1)$　　C. $y=-x+1$　　D. $y=(\ln x+1)(x-1)$

10. 设函数 $f(x)$ 为可微的奇函数,且 $f'(x_0)=2$, 则 $f'(-x_0)=$（　）

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续且可导，则 a,b 的值分别为（　）

A. $a=-2,b=-1$　　B. $a=-2,b=1$　　C. $a=2,b=-1$　　D. $a=2,b=1$

12. 设 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+1$ 的拐点，则常数 a,b 的值分别为（　）

A. $-1,3$　　B. $1,3$　　C. $-1,-3$　　D. $1,-3$

13. 函数 $y=\frac{\ln x}{x-1}$ 的垂直渐近线方程为（　）

A. $x=0$　　B. $x=1$　　C. $x=0,x=1$　　D. $y=0$

14. 设 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数，则下列等式中正确的是（　）

A. $\int f(x)dx = g(x)+C$　　B. $\int g'(x)dx = f(x)+C$

C. $\int g(x)dx = f(x)+C$　　D. $\int f'(x)dx = g(x)+C$

15. $I=\int_0^a x^3 f(x^2)dx(a>0)$,则（　）

A. $I=\int_0^a xf(x)dx$　　B. $I=\int_0^{a^2} xf(x)dx$

C. $I=\frac{1}{2}\int_0^a xf(x)dx$　　D. $I=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$

16. $\frac{d}{dx}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=$（　）

A. 0　　B. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　　C. $\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$　　D. $-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

17. 已知 $F(x)=\int_0^x \cos t^2 dt$,则 $F'(0)=$　（　）

A.0　　B.-1　　C.1　　D.-2

18. 若 $\int f(x)dx = x^2+c$，则 $\int xf(1-x^2)dx=$（　）

A. $2(1-x^2)^2+c$　　B. $-2(1-x^2)^2+c$

C. $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+c$　　D. $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+c$

19. 下列广义积分发散的是（　）

A. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$　　B. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　C. $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$　　D. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

20.已知向量 $\vec{a}=\{5,x,-2\}$ 和 $\vec{b}=\{y,6,4\}$ 平行，则 x 和 y 的值分别为（　）

A. $-4,5$　　B. $-3,-10$　　C. $-4,-10$　　D. $-10,-3$

21. 空间直线 $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \\ z=-3-4t \end{cases}$ 与平面 $x+y+z=0$ 的关系为:（　）

A. 垂直　　B. 平行　　C. 斜交　　D. 直线在平面内

22. 空间直角坐标系中 $x^2+y^2=4x$ 表示（　）

A. 圆　　B. 旋转抛物面　　C. 圆柱面　　D. 球面

23. 通解为 Ce^x（C 为任意常数）的微分方程为（　）

A. $y'+y=0$　　B. $y'-y=0$　　C. $y'\cdot y=1$　　D. $y-y'+1=0$

24. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\sqrt{xy}-1}{xy-1}=$（　）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 2

25. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续是它在该点处可微的（　）

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

26. 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点（1,2,5）处的切平面方程是（　）

A. $2x+4y-z=5$　　B. $4x+2y-z=5$

C. $x+2y-4z=5$　　D. $2x-4y+z=5$.

27. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$，则积分区间 D 可表示为（　）

A. $\begin{cases}1\le x\le 2\\1\le y\le 2\end{cases}$　　B. $\begin{cases}1\le x\le 2\\x\le y\le 2\end{cases}$　　C. $\begin{cases}1\le x\le 2\\1\le y\le x\end{cases}$　　D. $\begin{cases}1\le y\le 2\\1\le x\le y\end{cases}$

28. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则（　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ 收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ 收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + C)^2$ 收敛（其中C 为常数）

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + C)$收敛（其中$C$ 为常数）

29. 设$u_n = (-1)^n \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则级数（ ）

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散　　D. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

30. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$的和函数为（ ）

A. e^x　　B. e^{2x}　　C. e^{3x}　　D. $3e^{3x}$

二、填空题 （每空 2 分，共 20 分）

31. 函数$y=\sqrt{x^2+2}\ (x \ge 0)$ 的反函数是________.

32. 设$f(x)=x+1$，$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则$f(\varphi(x)+1)=$________.

33. 由$x+y+xy=1$所确定的隐函数$y=y(x)$在$x=1$处导数为________.

34. 函数$y=\ln x$在$[1,e]$上满足拉格朗日中值定理的$\xi=$___________.

35. $\int x \sin x dx =$________.

36. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx =$ ________.

37. 已知$a=\{-1,1,2\}, b=\{3,0,4\}$则$a$在$b$上的投影为$\mathrm{Pr}\, j_b a =$_______.

38. 设$f(x,y)=x^2+y^2+xy$，则$f_{yx}''(x,y)=$_______.

39. 若$f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2+xy+3x-2y-6z$则$grad(0,0,0)$为_______.

40. 函数$f(x)=\frac{1}{1-2x}$的麦克劳林展开式是_______.

三、计算题 （每小题 5 分，共 50 分）

41. 求$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\ln(1+x^2)}$.

42. 求函数$y=\frac{x}{1+x^2}$的极值点

43. 求不定积分$\int x^2 \ln x dx$

44. 求定积分$\int_1^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

45. 设$z=z(x,y)$由方程$x^2+z^2=\ln\frac{z}{y}$确定，求dz.

46. 求$x\frac{dy}{dx}=y+x\sec\frac{y}{x}$齐次方程的通解.

47. 求过三点$A(0,1,0)$，$B(1,-1,0)$，$C(1,2,1)$的平面方程。

48. 计算$\iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$，其中$D$是由$y=1,y=x,y=2,x=0$所围成的闭区域.

49. 计算积分$\int_L(x^2+2xy-y^2+10)dx+(x^2-2xy-y^2+15)dy$，其中$L$为曲线$y=\cos x$上从$A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$到点$B\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$的一段弧

50. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}x^n$的收敛域.

四、应用题 （每小题 7 分，共 14 分）

51. 计算由抛物线$\sqrt{y}=x$，直线$y=2-x$及x轴所围图形的面积以及该图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积.

52. 靠一堵充分长的墙边，增加三面墙围成一矩形场地，在限定场地面积为$64\,m^2$的条件下，问增加的三面墙各长多少时，其总长最小？

五、证明题(6 分)

53. 证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$，并计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$的值.

2017年河南省普通高等学校

选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷

高等数学模拟题（五）

说明：考试时间120分钟，试卷共150分。

题 号	一	二	三	四	五	总 分
分 数						

一、单项选择题（每小题2分，共60分。在每个小题的备选答案中选出一个正确答案，并将其代码写在题干后的括号内。）

1.设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, 1\le x\le 2, \\ x+1, 0\le x<1, \end{cases}$ 则 $F(x)=f(2x)+f(x+1)$ 的定义域是（　　）

A. $[0,1]$　　B. $[-1,0]$　　C. $[-1,1]$　　D. $[1,3]$

2. $f(x)=\begin{cases} x^3, -3\le x\le 0 \\ -x^3, 0<x\le 2 \end{cases}$ 是（　　）

A.奇函数　　B.偶函数　　C.有界函数　　D.周期函数

3. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$，则当 $x\ne 2$ 时，$f[f(x)]$（　　）

A. $\dfrac{x}{x+2}$　　B. $\dfrac{1}{x+2}$

C. $\dfrac{x}{3x+4}$　　D. $\dfrac{3x+4}{x}$

4.当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^{-x^2+2x^3}-1$ 与 $g(x)=x^2$ 比较是（　　）

A. $f(x)$ 是较 $g(x)$ 高阶的无穷小量

B. $f(x)$ 是较 $g(x)$ 低阶的无穷小量

C. $f(x)$ 是较 $g(x)$ 是同阶无穷小量，但不是等价无穷小量

D. $f(x)$ 是较 $g(x)$ 是等价无穷小量

5.设函数 $f(x)=\begin{cases} a+e^x, x<0 \\ \ln(1+x), x\ge 0 \end{cases}$ 在 x=0 处连续，则常数 a=（　　）

A. −1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 0　　D. 1

6. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\tan 2x}, x\ne 0 \\ 1\quad, x=0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

A.连续点　　B.可去间断点　　C.跳跃间断点　　D.以上都不对

7. 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导，且 $f(0)<0$，$f'(x)>0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，则方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内（　　）

A.没有根　　B.至少存在一个根　　C.有唯一根　　D.不能确定有根

8. 若 $f(x)=f(0)-3x+\alpha(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=0$，则 $f'(0)=$（　　）

A. 0　　B. 3　　C. −3　　D. 不存在

9. 设曲线 $y=e^{1-x^2}$ 与直线 $x=1$ 的交点为 P，则曲线 $y=e^{1-x^2}$ 在点 P 处的切线方程为（　　）

A. $2x-y-1=0$　　B. $2x-y+1=0$

C. $2x-y+3=0$　　D. $2x+y-3=0$

10. 若 $f(x-1)=x(x-1)$，则 $f'(x)=$（　　）

A. $1+2x$　　B. $x(x+1)$　　C. $x(x-1)$　　D. $2x-1$

11. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x\ne 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，则（　　）

A. $f(x)$ 在 $x=0$ 点间断　　B. $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续但不可导

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导但不连续　　D. $f(x)$ 在 $x=0$ 点有连续导数

县（市、区）________ 姓名________ 考生号________ 座位号________

装　订　线

12. 设$f(x)=x-\ln(1+x)$,则在$(0,+\infty)$内（ ）

A. $f(x)$单调增加,曲线$y=f(x)$为凸的

B. $f(x)$单调增加,曲线$y=f(x)$为凹的

C. $f(x)$单调减少,曲线$y=f(x)$为凸的

D. $f(x)$单调减少,曲线$y=f(x)$为凹的

13. 曲线$y=x\sin\frac{1}{x}$的渐近线有（ ）

A. 1条　B. 2条　C. 3条　D. 4条

14. 若$f'(x)$连续，则下列等式正确的是（ ）

A. $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$　B. $\int f'(x)dx=f(x)$

C. $\int df(x)=f(x)$　D. $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$

15. 若$f(x)$的一个原函数是$\sin x$，则$\int df(x)=$（ ）

A. $-\sin x+C$　B. $\sin x+C$

C. $-\cos x+C$　D. $\cos x+C$

16. 下列积分不为0的是（ ）

A. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos xdx$　B. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos xdx$　C. $\int_{-1}^{1}e^{-x}dx$　D. $\int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{1+(\sin x)^2}dx$

17. 若$\int f(x)dx=\frac{\ln x}{x}+c$，则$\int xf'(x)dx=$（ ）

A. $\frac{1-\ln x}{x^2}+c$　B. $\frac{1}{x}+c$　C. $x\ln x-x+c$　D. $\frac{1-2\ln x}{x}+c$

18. 若$f(\frac{1}{x})=\frac{x}{1+x}$，则$\int_0^1 f(x)dx=$（ ）

A. $\frac{1}{2}$　B. $1-\ln 2$　C. 1　D. $\ln 2$

19. $\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=$（ ）

A.不存在　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. 2

20. 对任意两向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，下列等式不恒成立的是（ ）

A. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　B. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

C. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$　D. $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+(\vec{a}\times\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$

21. 空间直角坐标系中，方程$x^2+y^2=16$表示（ ）

A. 圆　B. 圆面　C. 球面　D. 圆柱面

22. $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x$的特解应设为（ ）

A. $xe^{-x}(a\sin x+b\cos x)$　B. $e^{-x}(a\sin x+b\cos x)$

C. $x^2e^{-x}(a\sin x+b\cos x)$　D. $x^3e^{-x}(a\sin x+b\cos x)$

23. 函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{4x^2y^4}{(y^4+x^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在$(0,0)$极限（ ）

A. 0　B. 不存在　C. 无法确定　D. 以上都不成立

24. 设$z=(1+3x)^{2y}$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$（ ）

A. $2y(1+3x)^{2y-1}$　B. $6y(1+3x)^{2y-1}$

C. $(1+3x)^{2y}\ln(1+3x)$　D. $6y(1+3x)^{2y}$

25. 设D是xoy平面上以点$(1,1)$，$(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域，D_1是D在第一象限的部分，则$\iint_D(xy+\cos x\sin y)dxdy=$（ ）

A. $2\iint_{D_1}\cos x\sin ydxdy$　B. $2\iint_{D_1}xydxdy$

C. $2\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　D. 0

26. 设D是单位圆$x^2+y^2=1$的内部，则在极坐标系下$\iint_D x^2e^{x^2+y^2}dxdy$可表示为

( )

A. $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^1 re^{r^2}dr$　　B. $\int_0^{2\pi}r^3e^{r^2}d\theta\int_0^1\cos^2\theta dr$

C. $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^1 r^2e^{r^2}dr$　　D. $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^1 r^3e^{r^2}dr$

27. 设L为沿圆周$x^2+y^2=2x$的上半部分和x轴闭区域边界正方向围成，

$\oint_L 2e^x\sin ydx+(2e^x\cos y+x)dy=$　( )

A. π　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}\pi$　　D.不存在

28. 若数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，S_n是此级数的部分和，则必有（ ）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_n$　B. $\lim_{n\to\infty}S_n=0$　C. $\lim_{n\to\infty}S_n$存在　D. S_n是单调的

29. 下列级数收敛的是 （ ）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n}\right]$　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

30. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=-3$处收敛，则$\lim_{n\to\infty}2^na_n=$（ ）

A. 不存在　　B. 0　　C. 1　　D. 无法确定

二、填空题 （每空 2 分，共 20 分）

31. 函数$y=\sqrt{2-x}+\arcsin\frac{x-1}{2}$的定义域为________.

32. 若$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-6}{x-2}=5$，则$a=$________.

33. 已知当$x\to0$时，$f(x)$与$1-\cos x$等价，则$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x\sin x}=$________.

34. 函数$f(x)=x^4-2x^2+5$在区间$\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$上的最大值为________.

35. 设$\int f(x)dx=e^x+\sin x+C$，则$f(x)=$________.

36. 点$M_0(1,2,3)$到直线$L:\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{-3}$的距离$d=$________.

37. 方程$\left(y''\right)^3-xy'+\cos y=x^2+1$是________阶微分方程。

38. 设$f(x,y)=\frac{y}{x+y^2}$,则$f\left(\frac{y}{x},1\right)=$________.

39. 函数$f(x,y,z)=xy+yz+zx-(x+y+z)$在点$P(3,4,0)$处的最大方向导数为$\left|gradf(3,4,0)\right|=$ ________.

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$的和为________.

三、计算题 （每小题 5 分，共 50 分）

41. 求极限$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$

42. 已知$y=\ln\sin(1-2x)$，求$\frac{dy}{dx}$.

43. 求不定积分$\int\frac{\cos2x}{\cos x-\sin x}dx$

44. 求定积分$\int_1^2 x\ln xdx$

45. 求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面方程.

46. 求方程 $(y^2-6x)y'+2y=0$ 的通解.

47. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{-xy}+2z-e^z=2$ 确定，求 $dz\Big|_{\substack{x=2\\ y=-\frac{1}{2}}}$.

48. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{x^2}dxdy, D$ 是第一象限中由直线 $y=x$ 和曲线 $y=x^3$ 所围成封闭区域.

49. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛半径和收敛域

50. 设 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$，将其展开为麦克劳林级数.

四、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

51. 做一上部为半圆形，下部为矩形的窗户，，窗户周长 l 一定. 试确定半圆的半径 r 和矩形高度 h， 使通过窗户大的光线最充足.

52. 设曲线 $y=e^x, y=e^{-x}$ 及 $x=\ln 2$ 所围平面图形为 D.

(1) 求平面图形 D 的面积.

(2) 求该平面图形绕 y 轴旋转一周所生成旋转体的体积.

五、证明题(6 分)

53. 证明：$x>0, \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

县（市、区）＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 考生号＿＿＿＿ 座位号＿＿＿＿

装 订 线

2017 年河南省普通高等学校

选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷

高等数学模拟题（六）

说明：考试时间 120 分钟，试卷共 150 分。

题 号	一	二	三	四	五	总 分
分 数						

一、单项选择题（每小题 2 分，共 60 分。在每个小题的备选答案中选出一个正确答案，并将其代码写在题干后的括号内。）

1.下面各组函数中表示同一个函数的是（　）

A. $y=\sin x, y=\sqrt{1-\cos^2 x}$　　B. $y=x, y=\frac{x^2}{x}$

C. $y=x, y=\ln e^x$　　D. $y=2\ln x, y=\ln x^2$

2.下列函数中图形关于原点对称的是（　）

A. $y=\cos x$　　B. $y=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$

C. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$　　D. $y=\sin x+\cos x$

3. 函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)$不满足（　）

A. $f(-x)=f(x)$　　B. $f(-x)=-f(x)$

C. $f(x)=0$　　D. $f(x)=1$

4. 已知 $f(2x)=x^2-2x$，则 $f(x)=$（　）

A. $\frac{1}{4}x^2+1$　　B. $\frac{1}{4}x^2-1$　　C. $\frac{1}{4}x^2-x$　　D. $\frac{1}{4}x+1$

5. 当 $x\to 0$ 时，下列错误的是（　）

A. $x\sin x$ 是无穷小量　　B. $x\sin\frac{1}{x}$ 是无穷小量

C. $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是无穷大量　　D. $\frac{1}{x}$ 是无穷大量

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=$（　）

A. 0　　B. 6　　C. 36　　D. ∞

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+(x+1)\sin\frac{1}{x+1}, x<-1\\ 1, -1<x\le 0\\ \arctan x, x>0\end{cases}$，则 $f(x)$（　）

A.在 $x=-1$ 处连续，在 $x=0$ 处不连续；

B.在 $x=0$ 处连续，在 $x=-1$ 处不连续；

C.在 $x=-1,0$ 处均连续；

D.在 $x=-1,0$ 处均不连续.

8.若 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}, x\ne 2,\\ a, \quad x=2.\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续，则 $a=$（　）

A. 4　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 2　　D. $-\frac{1}{4}$

9. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有定义 $f(0)=0$，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 x 为等价无穷小，则（　）

A. $f'(0)=0$　　B. $f'(0)=1$

C. $f'(0)$ 不存在　　D. 不能判定 $f'(0)$ 的存在

10. 若曲线 $L_1: y=x^2+ax+b$ 和 $L_2: -1+xy^3+2y=0$ 在点 $(-1,1)$ 处相切，其中 a,b 为常数,则（　）

A. $a=0,b=-2$　　B. $a=1,b=-3$

C. $a=-3,b=-3$　　D. $a=-1,b=-1$

11. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2010)$,则 $f'(0)$ 等于（　）

A. $-2010!$　　B. 0　　C. $2010!$　　D. 2010

12. 设函数 $y=\ln\cos(1-x)+\sin 7$，则 $y'=$（　）

A. $\dfrac{1}{\cos(1-x)}$　　B. $-\tan(x-1)$

C. $\dfrac{1}{\cos(1-x)}+\cos 7$　　D. $\tan(x-1)+\cos 7$

13. 下列函数在 $[1,e]$ 满足拉格朗日定理的是（　）

A. $\dfrac{2}{2-x}$　　B. $\ln(x-5)$　　C. $\dfrac{3}{e^2-\ln x}$　　D. $\sqrt[3]{x-2}$

14. 曲线 $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}$ 的渐近线有（　）条

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

15. $f(x)$ 是 $g(x)$ 的原函数，则下列正确的是（　）

A. $\int f(x)dx=g(x)+C$　　B. $\int g(x)dx=f(x)+C$

C. $\int g'(x)dx=f(x)+C$　　D. $\int f'(x)dx=g(x)+C$

16. 下列函数中可以作为同一函数的原函数的是（　）

A. $\dfrac{1}{2}\sin x^2$ 和 $\dfrac{1}{4}\cos 2x$　　B. $\ln|\ln x|$ 和 $2\ln x$

C. $\dfrac{1}{2}\sin^2 x$ 和 $-\dfrac{1}{4}\cos 2x$　　D. $\tan^2\dfrac{x}{2}$ 和 $\csc^2\dfrac{x}{2}$

17. 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^x f(t+a)dt=$（　）

A. $F(x)-F(a)$　　B. $F(t+a)-F(2a)$

C. $F(x+a)-F(2a)$　　D. $F(t)-F(a)$

18. $\int_{-1}^{1} x^2 . \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}dx=$（　）

A. 2　　B. 0　　C. 1　　D. -1

19. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则定积分 $\int_{-a}^{a} f(-x)dx=$（　）

A. 0　　B. $2\int_0^a f(x)dx$　　C. $-\int_{-a}^a f(x)dx$　　D. $\int_{-a}^a f(x)dx$

20. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^2)^2}dx=$（　）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. 0　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

21. 下列下列各组角中，可以作为向量的方向角的是（　）

A. $\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}$

22. 下列微分方程中，可分离的变量方程是（　）

A. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$　　B. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$

C. $\dfrac{x}{y}dx+e^{x^2+y^2}dy=0$　　D. $\dfrac{dy}{dx}+2y=e^x$

23. 设二阶线性非齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个特解为: $y_1=\sin x,\ y_2=\sin x+e^x, y_3=\sin x+e^{3x}$,则其通解为(　)

A. $y=c_1\sin x+c_2\left(\sin x+e^x\right)+c_3\left(\sin x+e^{3x}\right)$

B. $y=c_1e^x+c_2e^{3x}+\sin x$

C. $y=c_1e^x+c_2e^{3x}$

D. $y=\sin x+c_1\left(e^{3x}-e^x\right)+c_2\sin x$

24. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=$（　）

A.2　　B.1　　C.0　　D.不存在

25. 方程$x+y+z=e^z$确定了$z=z(x,y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$（　）

A. $\frac{1}{e^z}$　　B. $\frac{1}{(x+y+z-1)^2}$　　C. $\frac{1}{(x+y+z-1)}$　　D. $\frac{1}{e^{2z}-1}$

26. 设$D=\left\{(x,y)\mid\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$，则$\iint\limits_D dxdy=$（　）

A. 6π　　B. 36π　　C. 2π　　D. 3π

27. 交换积分次序，$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy=$（　）

A. $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx$　　B. $\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx$

C. $\int_0^4 dy\int_{y+2}^{y^2}f(x,y)dx$　　D. $\int_0^2 dy\int_{y+2}^{y^2}f(x,y)dx$

28. 设L为圆周$x^2+y^2=a^2(a>0)$，则$\oint_L y^2ds=$（　）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}\pi a^3$　　C. πa^3　　D. πa^4

29. 下列命题正确的是：（　）

A. $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$必发散　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}v_n\ne 0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$必发散

C. $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$必收敛　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}v_n\ne 0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$必收

30. 若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$在点$x=0$处条件收敛，则在$x=-1$，$x=2$，$x=3$，$x=4$，$x=5$中使该级数收敛的点有（　）

A. 0个　　B. 1 个　　C. 2个　　D. 3

二、填空题（每空 2分，共 20分）

31. 设函数$y=f(x)$的定义域为$[0,1]$，则函数$f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$的定义域为________.

32. $y=3^x-1$的反函数是________.

33. 如果$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+1}{ax^m+x+\sqrt{2}}=\frac{3}{5}$，那么$m=$_______，$a=$_______.

34. 曲线$y=xe^{-x}$的凹区间是________.

35. 广义积分$\int_0^1\frac{1}{x^{1+q}}dx$当________收敛.

36. 已知$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=2$，$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$________.

37. 旋转曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$的旋转轴是________.

38. $y=-\frac{1}{4}xe^{-x}$是微分方程$y''-2y'-3y=e^{-x}$的特解，则其通解为________.

39. 设函数$f(x,y)=x^2y+(y-1)\arctan\sqrt{\frac{y}{x}}$，则$f_x'(1,1)=$________.

40. 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}}{(2n)!}$的和为________.

三、计算题（每小题 5 分，共 50 分）

41. 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}$

42. 设$y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中$f(x)$可微，求dy

43. 求不定积分$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

44. 求定积分$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$；

45. 求直线L，使它经过点$(5,0,-2)$，且平行于直线$\begin{cases}\pi_1: x-4y+2z=0,\\ \pi_2: 2x+3y-z+1=0.\end{cases}$

46. 求方程特解$y'=e^{2x-y}, y|_{x=0}=0$；

47..已知 $z=f\left(\sqrt{xy},\frac{x}{y}\right)$，求$dz$.

48. 计算$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中$D$由$x^2+y^2=2x$围成.

49. 计算曲线积分$\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$，其中$L$是曲线$y=\sin x$上从$(0,0)$到$(\pi,0)$的一段.

50. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^n$的收敛域。

四、应用题 （每小题 7 分，共 14 分）

51. 某产品的产量依赖于二种生产要素投入量，当二种生产要素投入量依次为x, y时，产量为$z=20-x^2+10x-2y^2+5y$。已知二种生产要素单价依次为1和2，产品的单价为5，求最大利润。

52. 一曲线通过点$(e^2,3)$,且在任一点处切线的斜率等于该点横坐标的倒数,

(1) 求该曲线方程;

(2)求该曲线与x轴及$x=e^2$所围图形绕y轴旋转一周形成旋转体的体积.

五、证明题(6 分)

53. 证明恒等式：$\arctan x+arc\cot x\equiv\frac{\pi}{2}, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

2017年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷
高等数学模拟题（一）参考答案

一．选择题

1-5 ACDDD　　6-10BADBD　　11-15 BCBCC

16-20 BABBD　　21-25 BBBCB　　26-30 ACBCA

二．填空题

31. $y=\log_3(x+1)$

32. e^2

33. $a=e.$

34. $(-1,0)$

35. $x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)+c$.

36. $\dfrac{\pi}{2}$

37. $\sqrt{26}$

38. $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

39. $-\sqrt{2}$

40. $(-1,1)$

三．计算题

41.解：$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$

42. 解：方程两边对自变量 x 求导，有

$y'=0+e^y+xe^yy'$，即 $(1-xe^y)y'=e^y$.

所以 $y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}=\dfrac{e^y}{2-y}$.

43.解：$\int\dfrac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx=\int\dfrac{3x^2(x^2+1)+1}{x^2+1}dx=\int3x^2dx+\int\dfrac{1}{x^2+1}dx=x^3+\arctan x+C$；

44.解：$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)\,\mathrm{d}x+\int_1^2\dfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(x+1)^2\Big|_0^1+\dfrac{1}{6}x^3\Big|_1^2=\dfrac{8}{3}$

45.解：平面 $\pi_1: x+2z=0$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\{1,0,2\}$；平面 $\pi_2: y-3z=2$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\{0,1,-3\}$.

可取　直线 L 的方向向量为：$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&2\\0&1&-3\end{vmatrix}=\{-2,3,1\}$.

所以，直线的标准式方程为：$L:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

46.解：　令 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x(2+y^2)=0\\\dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^2y+\ln y+1=0\end{cases}$，得唯一驻点 $P_0(0,e^{-1})$

又 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(2+y^2),\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x^2+\dfrac{1}{y}$

而在 $P_0(0,e^{-1})$ 处，$A>0$ 即 $\Delta=AC-B^2>0$，故 $f(x,y)$ 在 $P_0(0,e^{-1})$ 取极小值 $f(0,e^{-1})=-\dfrac{1}{e}$.

47.解：　由于 $y'-\dfrac{1}{x}y=x^2$ 为一阶线性非齐次微分方程，故由公式知通解为：

$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[C+\int e^{-\int\frac{1}{x}dx}x^2dx\right]=x\left(C+\int\dfrac{1}{x}\cdot x^2dx\right)=Cx+\dfrac{x^3}{2}$

48.解：$\iint\limits_D \left(\frac{x}{y}\right)^2 dxdy = \int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{x}{y}\right)^2 dy = \int_1^2\left[\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y^2}dy\right]x^2dx = \int_1^2\left[-\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\right]x^2dx$

$=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)x^2dx==\int_1^2\left(x^3-x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{9}{4}.$

49. 解：因为$P=2x+2y, Q=2x+y, \frac{\partial P}{\partial y}=2=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

所以曲线积分$\int_L(2x+2y)dx+(2x+y)dy$在积分区域上与路径无关，选择由点$(0,0)$到点$(1,1)$的直线段为积分路径，即路径$y=x, 0\le x\le 1$,则

$\int_L(2x+2y)dx+(2x+y)dy=\int_0^1 4xdx+3xdx=\int_0^1 7xdx=\frac{7}{2}.$

50 $f(x)=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{2^n n}(0<x\le 4)$

四. 应用题

51.解：由题意得，求生产量$f(x,y)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$在$150x+250y=50000$条件下的条件极值。用拉格朗日数乘法求之

构造函数$L(x,y,\lambda)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}+\lambda(150x+250y-50000)$

求$L(x,y,\lambda)$的驻点，

即$\begin{cases} L_x'=100\times y^{\frac{1}{4}}\times\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}+150\lambda=0 \\ L_y'=100\times x^{\frac{3}{4}}\times\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}+250\lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=250 \\ y=50 \end{cases} \\ L_\lambda'=150x+250y-50000=0 \end{cases}$

因此，当购买劳动力数量为250、资本数量为50时，生产量最高。

52.解： 联立方程组$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x-2, \end{cases}$ 得$\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$或$\begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$

所求平面图形D的面积为

$A=\int_0^2\left[(2+y)-y^2\right]dy=\left(2y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{10}{3}$

（2）平面图形绕x轴旋转形成的旋转体的体积为

$V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{x}\right)^2dx-\frac{1}{3}\pi 2^2.2=\frac{x^2}{2}\pi-\frac{8}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi.$

53.证明：令$f(x)=2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}$,

显然$f(x)$在$[1,+\infty)$连续，在$(1,+\infty)$可导，

且$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt{x^3}-1}{x^2}$,

显然$f'(x)$在$(1,+\infty)$上恒大于0，故$f(x)$在$[1,+\infty)$上单增.

由于$f(1)=0$，故当$x>1$时，$f(x)>f(1)=0$，即有$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

2017年河南省普通高等学校

选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷

高等数学模拟题（二）参考答案

一. 选择题

1-5 AADCC	6-10 ADCDA	11-15 ABACD
16-20 BCDCA	21-25 ABCDD	26-30 ACBAB

二. 填空题

31.$[\frac{1}{e},1]$

32.1

33. $\dfrac{dx}{x(1+\ln y)}$

34.0

35. $2^x\ln 2-\sin x$.

36.1

37. $\{6，4，5\}$

38. $y''-4y'+4y=0$

39. $dx+dy$

40. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n \quad x\in(-2,2)$

三．计算题

41.解：设 $a_n=\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{2}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi}$，

显然有

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n\pi)}=\frac{1}{n^2+n\pi}+\frac{2}{n^2+n\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}< a_n<\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{2}{n^2+\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+\pi}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+\pi)}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n\pi)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+\pi)}=\dfrac{1}{2}$，

由夹逼准则可知：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{2}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi})=\dfrac{1}{2}$

42.解：原方程组即为 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ y=1+\sin t.\end{cases}$， 又 $\dfrac{dy}{dt}=\cos t$； $\dfrac{dx}{dt}=6t+2$.

故 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\cos t}{6t+2}$.，所以：$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0.}=\dfrac{1}{2}$.

43.解：$\displaystyle\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\frac{1+(x^4-1)}{1+x^2}dx=\int\frac{1}{1+x^2}dx+\int\frac{x^4-1}{1+x^2}dx$

$$=\int\frac{1}{1+x^2}dx+\int x^2dx-\int dx=\arctan x+\frac{x^3}{3}-x+C.$$

44.解：令 $t=x-2$，得：

$$\int_1^3 f(x-2)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt=\int_{-1}^0(1+t^2)dt+\int_0^1 e^{-t}dt=\frac{1}{3}-e$$

45.解：令 $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^z$

$\therefore F_x'=-ye^{-xy},F_y'=-xe^{-xy},F_z'=e^z-2$

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{ye^{-xy}}{e^z-2}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=\dfrac{xe^{-xy}}{e^z-2}$

所以 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=\dfrac{ye^{-xy}}{e^z-2}dx+\dfrac{xe^{-xy}}{e^z-2}dy$

46.解：因 $\pi_1\perp\pi_2$，且 π_1 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=\{1,1,1\}$，且 $\overrightarrow{n_1}//\pi_2$，而 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1,0,-2\}$ 在平面 π_2 内，且 $\overrightarrow{n_1}$ 不平行与 $\overrightarrow{M_1M_2}$，

故平面 π_2 的法向量为：$\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{pmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}=\{-2,1,1\}$，

于是所求平面方程为：$-2(x-0)+(y-1)+(z+1)=0$，即 $2x-y-z=0$.

47.解：将原方程改写为：$(y^2-6x)\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}+2y=0$， 即 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{3}{y}x=-\dfrac{y}{2}$

这是一个关于未知函数 $x=x(y)$ 的一阶线性微分方程，通解为:

$$x=e^{\int\frac{3}{y}dy}\left(\int\left(-\frac{y}{2}\right)e^{-\int\frac{3}{y}dy}dy+C\right)=e^{3\ln y}\left(\int\left(-\frac{y}{2}\right)e^{-3\ln y}dy+C\right)$$

$$=y^3\left(\int\left(-\frac{y}{2}\right)\frac{1}{y^3}dy+C\right)=y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)=\frac{1}{2}y^2+Cy^3$$

48.解：曲面 $z=x^2+y^2$ 在任意点 $P(x,y,z)$ 处的法向量 $\vec{n}=\{2x,2y,-1\}$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 的法向量 $\vec{n}_0=\{2,4,-1\}$ 平行，

故 $\frac{2x}{2}=\frac{2y}{4}=\frac{-1}{-1}$ 即 $x=1,y=2,z=5$

所以切平面方程：$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，即 $2x+4y-z=5$.

49.解：原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r.rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2\cos\theta}\right]d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\theta)d(\sin\theta)=\frac{8}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{10}{9}\sqrt{2}.$$

50.解：（一）因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=1$，所以，$R=\frac{1}{\rho}=1$.

又在端点 $x=1$ 处，原级数 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；

在端点 $x=-1$ 处，原级数 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛.

故级数的收敛域为：$[-1,1)$.

（二）设和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ x\in[-1,1)$.

则 $s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(nx^{n-1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$.

因此，$s(x)=s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$，$x\in[-1,1)$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=s(\frac{1}{2})=-\ln\frac{1}{2}$

四．应用题

51.解：联立 $\begin{cases}y=x^2-1,\\y=x+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$

因此抛物线 $y=x^2-1$ 和直线 $y=x+1$ 的两个交点分别为 $(-1,0),(2,3)$.

$$A=\int_{-1}^{2}\left[(x+1)-(x^2-1)\right]dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

52.解：设圆柱体的表面积为 $s=2\pi r^2+2\pi rh$ ①

又由题意知 $\pi r^2h=V$，即 $h=\frac{V}{\pi r^2}$ ②

将②代入①，得 $s(r)=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$ ③

令 $s'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=0$，得唯一驻点 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

又 $s''(r)=4\pi+\frac{4V}{r^3}$；因为 $s''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)>0$，所以当 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，圆柱体的表面积最大，

此时，$h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

五．证明题

53.证明：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $\int_a^x f(t)dt$ 在 (a,b) 内可导.

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}=\frac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}=\frac{f'(\mu)(x-\xi)}{x-a}\quad \xi\in[a,x]$$

又 $f'(x)\le0$，有 $f'(\mu)\le0$，故得 $F'(x)\le0,x\in(a,b)$.

2017年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷
高等数学模拟题（三）参考答案

一. 选择题

1-5 DADBB　　6-10 BCDAA　　11-15 ACBBB

16-20 BCDBD　　21-25 CBCCC　　26-30 ACCBC

二．填空题

31. $\frac{4}{3x}-\frac{2x}{3}$

32. 1

33. $\frac{(x\ln y-y)y}{(y\ln x-x)x}$

34. 24

35. $x^2+C.$

36. $\frac{\pi}{2}$

37. $y=x^3.$

38. $\frac{xy}{x^2+y^2}$

39. 4π

40. $p>0,p\le 0$

三．计算题

42.解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2.x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}.\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}.\lim_{x\to0}(1+\frac{\sin x}{x})=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}.(1+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x})=\frac{1}{6}\times2=\frac{1}{3}.$$

42.解：取对数得 $\ln y=5x\ln x$，再两边对 x 求导，得 $\frac{y'}{y}=5\ln x+5$，

即

$$y'=5(1+\ln x)x^{5x},$$

$$\mathrm{d}\,y=5(1+\ln x)x^{5x}\,\mathrm{d}\,x$$

43.解：$\int\frac{1}{x^2+x-2}dx$

$$=\int\frac{1}{(x-1)(x+2)}dx=\int\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

44.解：$\int_1^e\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^e\ln x\,d\left(\sqrt{x}\right)=2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e-2\int_1^e\sqrt{x}\,d(\ln x)$

$$=2\sqrt{e}-2\int_1^e\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{e}-4\sqrt{x}\Big|_1^e=4-2\sqrt{e}.$$

45.解：已知平面 π 的法向量为 $\vec{n}=\{1,1,-1\}$，可取所求平面的法向量为

$$\overrightarrow{AB}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&3&-2\\1&1&-1\end{vmatrix}=\{-1,-1,-2\}\,//\,\{1,1,2\}.$$

由平面的点法式方程，所求平面即为

$$\pi:1.(x-1)+1(y+1)+2(z-1)=0\text{，即 }x+y+2z-2=0$$

46.解：原方程的齐次方程的特征方程

$$2r^2+r-1=0$$

有两个实特征根 $r_1=-1,r_2=\frac{1}{2}$

于是原方程对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}$

由于 $\lambda=1$ 不是特征方程的根，故应设特解为 $y^*=ae^x$，将其代入所给方程得 $a=\frac{3}{2}$，因此求得一个特解为 $y^*=\frac{3}{2}e^x$

从而所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}+\frac{3}{2}e^x$

47.解：

$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2f+x^3(f_1'\cdot y^2+f_2'\cdot y\cos xy)$ $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=x^3(f_1'\cdot 2xy+f_2'\cdot x\cos xy)$

故 $dz=[3x^2f+x^3(f_1'\cdot y^2+f_2'\cdot y\cos y)]dx+[x^3(f_1'\cdot 2xy+f_2'\cdot x\cos xy)]dy$

48. 解： 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 则 $x^2+y^2=1$ 化为 $r=1,x^2+y^2-2x=0$ 化为 $r=2\cos\theta.$

两圆交点由 $\begin{cases}r=1,\\ r=2\cos\theta\end{cases}$ 解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$. 于是 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\le\theta\le\frac{\pi}{3},1\le r\le 2\cos\theta\right\}.$

故

$$\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}\frac{1}{r}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{3}}r\Big|_1^{2\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos\theta-1)d\theta=(2\sin\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}\cdot$$

49.解： $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}.$

其中

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x+4)-3}=-\frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{3^{n+1}}.(x+4)^n \quad ,$$

$x\in(-7,-1)$；

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{(x+4)-2}=-\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2^{n+1}}.(x+4)^n,$$

$x\in(-6,-2).$

所以 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right](x+4)^n,x\in(-6,-2).$

50.解：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 中 $a_n=\frac{1}{n+1}$

由公式知 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}\right|=1$

故收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$，收敛区间为 $(-1,1)$

$x=-1$ 时，幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛；

$x=1$ 时，幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散；

故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域为 $[-1,1)$

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

则 $xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

由 $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$

则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\int_0^x\frac{1}{1-x}d(1-x)=-\ln(1-x)$

故 $xs(x)=-\ln(1-x)$

即 $s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$

四．应用题

51.解：（1）方法一：选 x 为积分变量

$$A=\int_0^1(e-e^x)dx=1$$

方法二：选 y 为积分变量

$$A=\int_1^e\ln ydy=y\ln y\Big|_1^e-y\Big|_1^e=1.$$

（2） $V=\pi\int_1^e\ln^2 ydy=\pi\left[y\ln^2 y\Big|_1^e-2\int_1^e\ln ydy\right]$

$$=\pi\left[y\ln^2 y\Big|_1^e-2y\ln y\Big|_1^e+2y\Big|_1^e\right]=(e-2)\pi.$$

52.解： 求函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}=0.001x+40+\frac{9000}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值点.显然 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，$g'(x)=0.001-\frac{9000}{x^2}$，有唯一驻点 $x=3000$.当 $0<x<3000$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>3000$ 时，$g'(x)>0$.

故 $x=3000$ 是 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极小值点，也是最小值点，并且还是整数.从而当该企业生产 3000 件产品时，平均成本达到最小.

五．证明题

53.证明：若 $a=b$ ，则显然①以等式形式成立.

.若 $a\neq b$，设 $f(x)=\arctan x$ ，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

由拉格朗日中值定理知，存在点 $\xi\in(a,b)$ 或 $\xi\in(b,a)$，

使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)=\frac{1}{1+\xi^2}\cdot(b-a)$

即 $|\arctan b-\arctan a|=\frac{1}{1+\xi^2}\cdot|b-a|\leq|b-a|$

2017 年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷
高等数学模拟题（四）参考答案

一. 选择题

1-5 DCAAA	6-10 BCCAD	11-15 CAACD
16-20 ACDCB	21-25 DCBBB	26-30 ACBCC

二．填空题

31. $x=\sqrt{y^2-2}\ (y\geq\sqrt{2})$

32. $\frac{2x^2+3}{1+x^2}$

33. $-\frac{1}{2}$

34. $e-1$.

35. $-x\cos x+\sin x+C$

36. $\frac{\pi}{4}$

37. 1

38. 1

39. $e\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$.

40. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

三．计算题

41.解：原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}$

（注意上式用到 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{2}$ 及 $\ln(1+x^2)\sim x^2(x\to 0)$.）

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

42.解法一：（一） $D=(-\infty,+\infty)$；

（二） $y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$；

（三） $y'=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=1$；无不可导点；

（四）列表判断：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	—	0	+	0	—
y	↓	极小 $-\frac{1}{2}$	↑	极大 $\frac{1}{2}$	↓

从上表可见，极小值为 $y(-1)=-\frac{1}{2}$；极大值为 $y(1)=\frac{1}{2}$.

解法二：第（一）、（二）、（三）步同解法一.

（四） $y''=\left[\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right]'=\frac{-6x-4x^3+2x^5}{(1+x^2)^4}$.

因为 $y''(-1)=\frac{1}{2}>0$，所以 $y(-1)=-\frac{1}{2}$ 为极小值.

因为 $y''(1)=-\frac{1}{2}<0$，所以 $y(1)=\frac{1}{2}$ 为极大值.

43.解： $\int x^2\ln x dx=\int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}d(\ln x)=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2 dx$

$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$；

44.解：令 $t=\sqrt{x}$，即 $x=t^2, dx=2tdt$，

$$\int_1^9\frac{1}{x+\sqrt{x}}dx=2\int_1^3\frac{tdt}{t^2+t}=2\int_1^3\frac{1}{t+1}d(t+1)=2\ln|1+t|\Big|_1^3=2\ln 2；$$

45.解：令 $F(x,y,z)=x^2+z^2-\ln\frac{z}{y}$，则

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x, \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{y}{z}\left(-\frac{z}{y^2}\right)=-\frac{1}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=2z-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}=2z-\frac{1}{z}$,

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{2xz}{2z^2-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{z}{y(2z^2-1)}$,

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{2xz}{2z^2-1}dx-\frac{z}{y(2z^2-1)}dy$

46.解：原方程可化为： $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sec\frac{y}{x}$ ① 为齐次方程.令 $u(x)=\frac{y}{x}$，则 $y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$.

①可化为

$$xu'=\sec u \qquad ②$$

②为可分离变量型.分离变量且两边积分得

$$\int\frac{1}{\sec u}du=\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow u=\arcsin\ln(Cx)$$

故原方程的通解为 $\frac{y}{x}=\arcsin\ln(Cx)\Rightarrow y=x\arcsin\ln(Cx)$

47.解：$\overrightarrow{AB}=\{1,-2,0\},\overrightarrow{AC}=\{1,1,1\}$，平面法向量 $\vec{n}$ 同时垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$，于是可令

则平面方程为：$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}=\{-2,-1,3\}$

$-2(x-0)-(y-1)+3(z-0)=0$，即 $-2x-y+3z+1=0$

48.解：$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_1^2 dy\int_0^y e^{\frac{x}{y}}dx=\int_1^2(ye-y)dy=(e-1)\frac{y^2}{2}\Big|_1^2=\frac{3}{2}(e-1).$

49.解：令 $P(x,y)=x^2+2xy-y^2+10,Q(x,y)=x^2-2xy-y^2+15$

则 $$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x-2y$$

因此，该曲线积分与路径无关.

取 x 轴上从点 $A(\frac{\pi}{2},0)$ 到点 $B(-\frac{\pi}{2},0)$ 的直线段积分

原式 $=\int\limits_{\vec{AB}}(x^2+2xy-y^2+10)dx+(x^2-2xy-y^2+15)dy$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(x^2+10)dx=\left[\frac{x^3}{3}+10x\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{\pi^3}{12}-10\pi.$$

50.解：收敛半径：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$，收敛区间为 $(-1,1)$

在 $x=-1$ 处,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}(-1)^n=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛；　在 $x=1$ 处,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 收敛，

所以收敛域为：$[-1,1]$.

四．应用题

51.解：由 $\begin{cases}x=\sqrt{y}\\ y=2-x\end{cases}$ 得交点 $(1,1)$.

面积 $A=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

体积 $V_y=\int_0^1(2-y^2)dy-\pi\int_0^1 ydy=\frac{11}{6}\pi$.

52.解：设三面墙的长度分别为 $x,x,y(m)$，则三面墙之总长

$$z=f(x,y)=2x+y.$$

问题化为求函数 $z=f(x,y)=2x+y$ 在条件 $\varphi(x,y)=xy-64=0$ 下的极值.宜用拉格朗日乘数法解之.

令 $$L(x,y,z,\lambda)=2x+y++\lambda(xy-64)$$

由 $$\begin{cases}L_x'=2+\lambda y=0,\\ L_y'=1+\lambda x=0,\\ L_\lambda'=xy-64=0.\end{cases}$$

解之，$\begin{cases}x=4\sqrt{2},\\ y=8\sqrt{2}.\end{cases}$ 则 $(4\sqrt{2},8\sqrt{2})$ 就是所求之条件极值点.

故当三面墙的长度分别为 $4\sqrt{2},8\sqrt{2},4\sqrt{2}$ 时，三面墙的总长最小

五．证明题

53.证明：

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$（令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $dx=-dt$）$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{4}.$$

2017年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷
高等数学模拟题（五）参考答案

一．选择题

1-5 ACCCA　　6-10 BCCDA　　11-15 BBAAD
16-20 CDDCC　　21-25 DABBC　　26-30 DCCDB

二．填空题

31.$[-1,2]$

32.1

33.$\frac{1}{2}$

34.5

35.$e^x+\cos x$.

36.$\frac{2}{5}$

37.2

38.$\frac{x}{x+y}$

39.7

40.$\frac{1}{2}$

三．计算题

41.解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[1+(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)]^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{[1+(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}\right\}^{x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)}$$

令$t=\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1$，则当$x\to\infty$时，$t\to 0$，又

$\lim\limits_{x\to\infty}x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}x(\cos\frac{1}{x}-1)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(\frac{1}{2x})^2}{\frac{1}{x}}=1$，故$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=e$.

42.解：

$$y'=\left[\ln\sin(1-2x)\right]'=\frac{1}{\sin(1-2x)}\left(\sin(1-2x)\right)'=\frac{\cos(1-2x)}{\sin(1-2x)}\left(1-2x\right)'=-2\cot(1-2x)$$

43.解：$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}dx$

$$=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C.$$

44.解：$\int_1^2 x\ln x dx=\int_1^2\ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}d(\ln x)$

$$=2\ln 2-\frac{1}{2}\int_1^2 x dx=2\ln 2-\frac{x^2}{4}\Big|_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}.$$

45.解：由于$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,4,-6\}$ $\overrightarrow{M_1M_3}=\{-2,3,-1\}$，

取$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=14\vec{i}+9\vec{j}-\vec{k}$.

所以，据平面的点法式方程，（代入M_2）得：

$\pi:14(x+1)+9(y-3)-(z+2)=0$，即 $\pi:14x+9y-z-15=0$.

46.解：将原方程变为 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{3}{y}x=-\dfrac{y}{2}$，$(p(y)=-\dfrac{3}{y},q(y)=-\dfrac{y}{2})$，

故通解为：$x=e^{-\int\left(-\frac{3}{y}\right)dy}\left(C+\int\left(-\dfrac{y}{2}\right)e^{\int\left(-\frac{3}{y}\right)dy}dy\right)=y^3(C+\int\left(-\dfrac{y}{2}\right)\dfrac{1}{y^3}dy)$

$$=y^3(\frac{1}{2y}+C)=\frac{1}{2}y^2+Cy^3$$

47.解：令 $F(x,y,z)=e^{-xy}+2z-e^z-2$，

则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-ye^{-xy},\dfrac{\partial F}{\partial y}=-xe^{-xy}$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}=2-e^z$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{ye^{-xy}}{2z-e^z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{xe^{-xy}}{2z-e^z},$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{ye^{-xy}}{2z-e^z}dx+\frac{xe^{-xy}}{2z-e^z}dy$$

当 $x=2,y=-\dfrac{1}{2}$ 时，$z=1$，

所以 $dz\Big|_{\substack{x=2\\y=-\frac{1}{2}}}=\dfrac{-\frac{1}{2}e}{2-e}dx+\dfrac{2e}{2-e}dy=-\dfrac{e}{2-e}\left(\dfrac{1}{2}dx-2dy\right)$

48.解：因为二重积分的被积函数 $f(x,y)=e^{x^2}$，它适宜于"先对 y，后对 x"，故 D 可用不等式表示为 $D:\begin{cases}x^3\le y\le x,\\0\le x\le 1.\end{cases}$ 于是

$$I=\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1dx\int_{x^3}^x e^{x^2}dy=\int_0^1\left(x-x^3\right)e^{x^2}dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx-\int_0^1x^3e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1e^{x^2}d\left(x^2\right)-\frac{1}{2}\int_0^1x^2d\left(e^{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\left[x^2e^{x^2}\Big|_0^1-\int_0^1e^{x^2}d\left(x^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)-\frac{1}{2}\left[e-e^{x^2}\Big|_0^1\right]=\frac{1}{2}(e-1)-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}(e-1)=\frac{e}{2}-1.$$

49.解：（一）当 $x=0$ 时，原级数显然收敛.

（二）当 $x\neq0$ 时，记 $u_n(x)=\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$，$n=1,2,\ldots$

并记 $\rho(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}.x^2=x^2$，则

（1）如果 $\rho(x)=|x|^2<1$ 时，即 $|x|<1$ 时，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 收敛；

（2）如果 $\rho(x)=|x|^2>1$ 时，即 $|x|>1$ 时，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 发散；

所以，R=1.

（3）又在端点 $x=-1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\dfrac{1}{2n-1}$ 发散（因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n-1}\Big/\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\dfrac{1}{2n-1}$ 也发散）；

又在端点 $x=1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ 也发散.

所以，收敛域为 $(-1,1)$.

50.解：$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

其中 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$，$x\in(-1,1]$

$$\ln(1-x)=\ln[1+(-x)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(-x)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{1}{n+1}x^{n+1},$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1},\quad x\in[-1,1)$$

所以

$$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n+1}x^{n+1},$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1)$$

四．应用题

51.解：由于$l=\pi r+2h+2r$，所以

$$h=\frac{1}{2}[l-(\pi+2)r].$$

面积$S=2rh+\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi r^2+r[l-(\pi+2)r]$.

令$S'(r)=\pi r+l-2(\pi+2)r=l-(\pi+4)r=0$，则$r=\frac{l}{\pi+4}$. 又

$$S''(r)=-(\pi+4)<0,$$

且驻点唯一，故当$r=h=\frac{l}{\pi+4}$时，窗户的光线最充足.

52.解：(1) $A=\int_0^{\ln 2}\left(e^x-e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}$

(2) $V=2\pi\int_0^{\ln 2}xe^x dx-2\pi\int_0^{\ln 2}xe^{-x}dx$

$$=2\pi\int_0^{\ln 2}xd\left(e^x+e^{-x}\right)$$

$$=2\pi x\left(e^x+e^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2}-2\pi\int_0^{\ln 2}\left(e^x+e^{-x}\right)dx$$

$$=\pi\left(5\ln 2-3\right)$$

五．证明题

53.证明：设$f(t)=\ln t\ (t>0)$，则$f'(t)=\frac{1}{t}$.

在$[1,1+x]$上由拉格朗日中值定理知，

$$\ln(1+x)-\ln 1=f(1+x)-f(1)=f'(\xi)\cdot x=\frac{1}{\xi}\cdot x$$

即：$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)=\frac{1}{\xi}\cdot x<\frac{1}{1}\cdot x=x\left(\xi\in(1,1+x)\right)$

2017年河南省普通高等学校

选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试模拟试卷

高等数学模拟题（六）参考答案

一．选择题

1-5 CCDCC	6-10 CABBC	11-15 CBCCB
16-20 CCBDB	21-25 CCBCB	26-30 ABCBC

二．填空题

31. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$

32. $y=\log_3(x+1)$

33. $m=2,a=5$

34. $(2,+\infty)$

35. $q<0.$

36. $\sqrt{19}$

37. z轴

38. $y=-\frac{1}{4}xe^{-x}+c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$

39. 2

40. $3\cos 3$

三．计算题

41.解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x(1+x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x}+1}=1$

42.解：

$$dy=\frac{1}{x}f'(\ln x)e^{f(x)}dx+f(\ln x)e^{f(x)}f'(x)dx$$

$$=e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]dx$$

43.解：$\int\dfrac{x^2}{1+x^2}dx=\int\dfrac{-1+(x^2+1)}{1+x^2}dx=-\int\dfrac{1}{1+x^2}dx+\int 1dx=-\arctan x+x+C.$

44.解：令 $t=\sqrt{x}$，即 $x=t^2,dx=2tdt$，

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 te^t dt=2\int_0^1 td\left(e^t\right)=2\left[te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t dt\right]=2e-2e^t\Big|_0^1=2.$$

45.解：设 L 的方向向量为 $\vec{a}$，平面 π_1 和 π_2 的法向量分别为 $\overline{n_1},\overline{n_2}$，依假设

$\vec{a}//\pi_1,\vec{a}//\pi_2$，从而 $\vec{a}\perp\overline{n_1},\vec{a}\perp\overline{n_2}$，因此

$$\vec{a}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-4&2\\2&3&-1\end{vmatrix}=\{-2,5,11\}$$

又直线 L 过点 $(5,0,-2)$，因此 L 的方程为 $\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+2}{11}$

46.解：$y'=e^{2x-y},y\big|_{x=0}=0$；　　①

①可化为　$e^y dy=e^{2x}dx$

上式两边积分得

$$\int e^y dy=\int e^{2x}dx\Rightarrow e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}C$$

故原方程的通解为　$2e^y=e^{2x}+C$　　②

将 $y\big|_{x=0}=0$ 代入②解得　$C=1$.

所以原方程的特解为 $2e^y=e^{2x}+1$

47.解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}f_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}f_1'-\dfrac{x}{y^2}f_2'$.

$$dz=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}f_1'+\frac{1}{y}f_2'\right)dx+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}f_1'-\frac{x}{y^2}f_2'\right)dy$$

48.解：令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$ 则

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\cdot 8\cos^3\theta d\theta=\frac{32}{9}$$

49.解：$\int_L\sin 2xdx+2(x^2-1)ydy=\int_0^{\pi}[\sin 2xdx+2(x^2-1)\sin x\cos x]dx=\int_0^{\pi}x^2\sin 2xdx$

$$=-\frac{x^2\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}x\cos 2xdx=-\frac{\pi^2}{2}+\int_0^{\pi}x\cos 2xdx$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{2}dx=-\frac{\pi^2}{2}.$$

50.解：幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^n$ 中 $a_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$

有公式知 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}}\right|=\dfrac{1}{2}$

故收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=2$，收敛区间为 $(-2,2)$

$x=-2$ 时，幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n-1)$ 发散；

$x=2$ 时，幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)$ 发散；

故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^n$ 的收敛域为 $(-2,2)$

四．应用题

51.解： $L=5(20-x^2+10x-2y^2+5y)-x-2y=100-5x^2+49x-10y^2+23y$

所以 $\begin{matrix} L'_x=-10x+49 \\ L'_y=-20y+23 \end{matrix}$ 令其为零，得 $x=4.9, y=1.15$

又 $A=L'_{xx}=-10, B=0, C=L'_{yy}=-20, \therefore B^2-AC<0$，故为极小值，依题意知当两生产要素分别为 4.9，1.15 时，利润最大.

52.解：(1) 由题意知 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $y=\ln x+C$

又因为曲线过 $\left(e^2,3\right)$，所以 $C=3-\ln e^2=1$

故曲线方程为: $y=\ln x+1$

(2) $V=2\pi\int_{\frac{1}{e}}^{e^2}x\left(1+\ln x\right)dx=\pi\left(\frac{5}{2}e^4+\frac{1}{2e^2}\right)$ 或

$$V=\pi\int_0^3\left(e^2\right)^2dy-\pi\int_0^3\left(e^{y-1}\right)^2dy=\pi\left(\frac{5}{2}e^4+\frac{1}{2e^2}\right)$$

四．证明题

53.证明：构造函数 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x$，

而 $f'(x)=(\arctan x)'+(\operatorname{arccot} x)'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$，

对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$.由拉格朗日中立定理的推论可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为常值函数，

显然 $f(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，

从而 $\arctan x+arc\cot x\equiv\frac{\pi}{2}, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.