

2001 年河南省普通高等学校  
选拔专科优秀毕业生升入本科学校学习考试

# 高等数学试卷

题 号	一	二	三	四	五	总 分
得 分						

考生注意: 根据国际要求, 试卷中正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用  $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\arctan x$ 、 $\operatorname{arccot} x$  表示。

一、**选择题** (每小题 1 分, 共 30 分) 每小题选项中只有一个是正确的, 请将正确答案的序号填在括号内)

1、函数  $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(3-x)$  的定义域为 ( )

(A)  $[0, 3)$ , (B)  $(0, 3)$ , (C)  $(0, 3]$ , (D)  $[0, 3]$ ;

2、已知  $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ , 则  $f(x)$  等于 ( )

(A)  $x^2 + 2$ , (B)  $(x+2)^2$ , (C)  $x^2 - 2$ , (D)  $(x-2)^2$ ;

3、设  $f(x) = 1 - \cos 2x$ ,  $g(x) = x^2$ , 则当  $x \rightarrow 0$   $f(x)$  是  $g(x)$  的 ( )

(A) 高阶无穷小, (B) 低阶无穷小,  
(C) 等价无穷小, (D) 同阶但不等价无穷小;

4、对于函数  $y = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}$ , 下列结论中正确的是 ( )

(A)  $x = 0$  是第一类间断点,  $x = 2$  是第二类间断点,  
(B)  $x = 0$  是第二类间断点,  $x = 2$  是第一类间断点,  
(C)  $x = 0$  是第一类间断点,  $x = 2$  是第一类间断点,  
(D)  $x = 0$  是第二类间断点,  $x = 2$  是第二类间断点;

5、设  $f'(x) = 2$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{h}$  的值为 ( )

(A) 1, (B) 2, (C) 0, (D) 4;

6、设  $y = \cos e^x$ , 则  $dy$  等于 ( )

(A)  $-e^x \sin e^x dx$ , (B)  $-e^x \sin e^x$ ,  
(C)  $e^x \sin e^x dx$ , (D)  $-\sin e^x dx$ ;

7、已知椭圆的参数方程为  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} (a > 0, b > 0)$ , 则椭圆在  $t = \frac{\pi}{4}$  对

应点处的切线斜率为

(A)  $\frac{b}{a}$ , (B)  $\frac{a}{b}$ , (C)  $-\frac{b}{a}$ , (D)  $-\frac{a}{b}$ ;

8、函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导是它在  $x_0$  处连续的 ( )

(A) 充分必要条件, (B) 必要条件, (C) 充分条件, (D) 以上都不对;

9、曲线  $y = x^3 - 3x^2$  的拐点为 ( )

(A) (1, -2), (B) 1, (C) (0, 0), (D) (2, -4);

10、下列函数中在  $[-1, 1]$  上满足罗尔定理条件的是 ( )

(A)  $y = |x|$ , (B)  $y = x^3$ , (C)  $y = x^2$ , (D)  $y = \frac{1}{x}$ ;

11、设  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int f(2x)dx$  等于 ( )

(A)  $\frac{1}{2} F(x) + C$ , (B)  $\frac{1}{2} F(2x) + C$ , (C)  $F(x) + C$ , (D)  $F(2x) + C$ ;

12、下列式子中正确的是 ( )

(A)  $\int dF(x) = F(x)$ , (B)  $d \int dF(x) = F(x) + C$ ,

(C)  $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)dx$ , (D)  $d \int f(x)dx = f(x)dx$ ;

13、设  $I_1 = \int_0^1 x^2 dx$ ,  $I_2 = \int_0^1 e^{x'} dx$ 。则它们的大小关系是 ( )

(A)  $I_1 > I_2$ , (B)  $I_1 = I_2$ , (C)  $I_1 < I_2$ , (D)  $I_1 \geq I_2$ ;

14、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \tan^2 t dt}{x^3}$  等于 ( )

(A)  $+\infty$ , (B)  $\frac{1}{6}$ , (C) 0, (D)  $\frac{1}{3}$ ;

15、下列广义积分中收敛的是 ( )

(A)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ , (B)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ,

(C)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ , (D)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx$ ;

- 16、  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$  等于 ( )
- (A) 0, (B)  $\frac{1}{2}$ , (C)  $-\frac{1}{2}$ , (D)  $+\infty$ ;
- 17、 设  $z = xy + x^3$ , 则  $dz|_{y=1}^{x-1}$  等于 ( )
- (A)  $dx + 4dy$ , (B)  $dx + dy$ , (C)  $4dx + dy$ , (D)  $3dx + dy$ ;
- 18、 函数  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$  的驻点是 ( )
- (A) (0, 0), (B) (0, 1), (C) (1, 0), (D) (1, 1);
- 19、 平面  $3x + 2y - z + 5 = 0$  与  $x - 2y - z - 4 = 0$  的位置关系是 ( )
- (A) 平行, (B) 垂直, (C) 重合, (D) 斜交;
- 20、 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$  则在极坐标系中,
- $\iint_D f(x^2 + y^2) dx dy$  可表示为 ( )
- (A)  $\int_0^\pi d\vartheta \int_0^R f(r^2) dr$ , (B)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^R f(r^2) r dr$
- (C)  $\int_0^\pi d\vartheta \int_0^R f(r^2) r dr$ , (D)  $\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R f(r^2) dr$ ;
- 21、 设级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - u_n)$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  等于 ( )
- (A) 1, (B) 0, (C)  $+\infty$ , (D) 不确定;
- 22、 下列级数中, 收敛的是 ( )
- (A)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , (B)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n}$ , (C)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n}$ , (D)  $\sum_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n^2} + (\frac{4}{3})^n]$ ;
- 23、 设正项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  收敛, 则下列级数中一定收敛的是 ( )
- (A)  $\sum_{n=1}^{+\infty} nu_n$ , (B)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{u_n}$ , (C)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ , (D)  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ ;

24、 下列级数中, 条件收敛的是 ( )

(A)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ , (B)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ , (C)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ , (D)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$ ;

25、 若幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在  $x=2$  处收敛, 则该级数在  $x=-1$  处 ( )

(A) 发散, (B) 条件收敛, (C) 绝对收敛, (D) 敛散性无法判定;

26、 某二阶常微分方程的下列解中为通解的是 ( )

(A)  $y = C \sin x$ , (B)  $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ ,

(C)  $y = \sin x + \cos x$ , (D)  $y = (C_1 + C_2) \cos x$ ;

27、 下列常微分方程中为线性方程的是 ( )

(A)  $y' = e^{x-y}$ , (B)  $yy' + y = \sin x$ ,

(C)  $x^2 dx = (y' + 2xy) dy$ , (D)  $xy' + y - e^{2x} = 0$ ;

28、 微分方程  $y''' = x$  的通解为 ( )

(A)  $y = \frac{1}{24} x^4 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ , (B)  $y = \frac{1}{12} x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ ,

(C)  $y = \frac{1}{12} x^4 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ , (D)  $y = \frac{1}{18} x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ ;

29、 微分方程  $y'' - 4y = 0$  的通解为 ( )

(A)  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ , (B)  $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$ ,

(C)  $y = C_1 + C_2 e^{2x}$ , (D)  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ ;

30、 对于微分方程  $y'' - 2y = x^2$  利用待定系数法求特解  $y^*$  时, 下列特解设法正确的是 ( )

(A)  $y^* = ax^2 + bx + c$ , (B)  $y^* = x^2(ax^2 + bx + c)$ ,

(C)  $y^* = x(ax + b)$ , (D)  $y^* = x(ax^2 + bx + c)$ 。

二、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

- 1、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} =$  \_\_\_\_\_ ；
- 2、设  $f(x) = x^3 + 3^x$ ，则  $f^{(4)}(0) =$  \_\_\_\_\_ ；
- 3、曲线  $y = \arctan 2x$  在  $(0, 0)$  点的法线方程为 \_\_\_\_\_ ；
- 4、 $\int e^x \sin e^x dx =$  \_\_\_\_\_ ；
- 5、由曲线  $y = x^2$ ， $y = 0$ ， $x = 1$  所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所称的旋转体的体积是 \_\_\_\_\_ ；
- 6、设  $z = x^y + y^x$ ，则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  \_\_\_\_\_ ；
- 7、交换积分  $I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy$  的积分次序，则  $I =$  \_\_\_\_\_ ；
- 8、幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$  的收敛半径为 \_\_\_\_\_ ；
- 9、幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$  的和函数  $S(x) =$  \_\_\_\_\_ ；
- 10、方程  $\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0$  的通解为 \_\_\_\_\_ ；

### 三、计算题 (每小题 4 分，共 36 分)

- 1、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x}$  .
- 2、求函数  $y = (1 + 2x)^{1+2x}$  的导数.
- 3、已知  $z = f(xy, x + y)$  且  $f$  可微，求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}$  .
- 4、计算  $\int x \ln(1 + x^2) dx$  .
- 5、 $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$  .
- 6、计算  $I = \iint_D xy^2 dx dy$ ，其中  $D$  为  $x^2 + y^2 = 4, x = 0$  所围的右半圆.

7、计算积分  $\int_L (x^3 - y)dx - (x + \sin y)dy$ , 其中  $L$  是曲线  $y = x^2$  上从点  $(0, 0)$  到点  $(1, 1)$  之间的一段有向弧.

8、求过点  $P(1,1,1)$ 且平行于平面  $\pi_1: 2x - 3y + z - 4 = 0$ 与

$\pi_2: x + y - z - 6 = 0$  的直线方程.

9、将函数  $f(x) = \frac{1}{2 - 3x + x^2}$  展开成麦克劳林级数, 并写出收敛区间.

四、应用题 (每小题 5 分, 共 10 分)

1、某工厂生产某产品需两种原料 A、B, 且产品的产量  $z$  与所需 A 原料数  $x$  及 B 原料数  $y$  的关系式为  $z = x^2 + 8xy + 7y^2$ . 已知 A 原料数的单价为 1 万元/吨, B 原料数的单价为 2 万元/吨, 现有 100 万元, 如何购置原料, 才能使该产品的产量最大?

2、已知位于第一象限的凸曲线经过原点  $O(0, 0)$  和点  $A(1,1)$ 且对于该曲线上的任一点  $P(x, y)$ , 曲线弧  $\widehat{OP}$  与直线段  $\overline{OP}$  所围的平面图形面积为  $x^3$ , 求曲线弧的方程.

五、证明题 (4 分)

证明方程  $e^x - \frac{3}{2} - \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = 0$  在区间  $(0, 1)$  内有唯一的实根.

## 2002 年河南省普通高等学校 选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试

### 《高等数学》试卷

一、单项选择题(每小题 2 分,共 50 分) 每小题选项中只有一个答案是正确的,请将正确的序号填在题后的括号内. 不选、错选或多选者,该题无分.

1. 函数  $y = \sqrt{16 - x^2} + \arcsin \frac{2x - 1}{7}$  的定义域为 ( )  
 A.  $[2, 3]$       B.  $[-3, 4]$       C.  $[-3, 4)$       D.  $(-3, 4)$
2. 函数  $y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 是 ( )  
 A. 偶函数      B. 奇函数      C. 非奇非偶函数      D. 不能断定
3. 点  $x = 0$  是函数  $y = e^{\frac{1}{x}}$  的 ( )  
 A. 连续点      B. 可去间断点      C. 跳跃间断点      D. 第二类间断点
4. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan 2x$  是 ( )  
 A. 比  $\sin 5x$  高阶无穷小      B. 比  $\sin 5x$  低阶无穷小  
 C. 与  $\sin 5x$  同阶无穷小      D. 与  $\sin 5x$  等价无穷小
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x}$  的值 ( )  
 A.  $e$       B.  $\frac{1}{e}$       C.  $e^2$       D. 0
6. 函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的导数  $f'(x_0)$  可定义为 ( )  
 A.  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$       B.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$   
 C.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\Delta x}$       D.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$
7. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$ , 则  $f'(0)$  等于 ( )  
 A. 4      B. 2      C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{1}{4}$
8. 过曲线  $y = x + e^x$  的点  $(0, 1)$  处的切线方程为 ( )  
 A.  $y + 1 = 2(x - 0)$       B.  $y = 2x + 1$   
 C.  $y = 2x - 3$       D.  $y - 1 = x$
9. 若在区间  $(a, b)$  内, 导数  $f'(x) > 0$ , 二阶导数  $f''(x) > 0$ , 则函数  $f(x)$  在区间内是 ( )  
 A. 单调减少, 曲线是凹的      B. 单调减少, 曲线是凸的  
 C. 单调增加, 曲线是凹的      D. 单调增加, 曲线是凸的
10. 函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$  在区间  $[0, 4]$  上的最大值为 ( )  
 A. 4      B. 0      C. 2      D. 3

11. 设函数  $y = f(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = 5e^{-t} \\ y = 3e^t \end{cases}$  确定, 则  $\frac{dy}{dx} =$  ( )  
 A.  $\frac{3}{5}e^{2t}$       B.  $\frac{3}{5}e^t$       C.  $-\frac{3}{5}e^{-t}$       D.  $-\frac{3}{5}e^{2t}$
12.  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^1 \sqrt{1+t^3} dt =$  ( )  
 A.  $2x \sqrt{1+x^6}$       B.  $-2x \sqrt{1+x^6}$       C.  $\sqrt{1+x^6}$       D.  $-\sqrt{1+x^6}$
13. 若  $f'(x^2) = \frac{1}{x} (x > 0)$ , 则  $f(x) =$  ( )  
 A.  $2x + C$       B.  $\ln x + C$       C.  $2\sqrt{x} + C$       D.  $\frac{1}{\sqrt{x}} + C$
14. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) = x^2 - x \int_0^1 f(x) dx$ , 则  $f(x)$  为 ( )  
 A.  $x^2 - \frac{2}{9}x$       B.  $x^2 + \frac{2}{9}x$       C.  $x^2 - \frac{1}{9}x$       D.  $x^2 + \frac{1}{9}x$
15. 定积分  $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$  的值是 ( )  
 A.  $e$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $e^{\frac{1}{2}}$       D. 2
16. 若积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$  收敛, 则  $k$  满足 ( )  
 A.  $k > 1$       B.  $k < 1$       C.  $k = 0$       D.  $k = e$
17. 直线  $L: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{4}$  与平面  $\pi: 6x - 2y + 8z - 7 = 0$  的位置关系是 ( )  
 A. 直线  $L$  与平面  $\pi$  平行但不共面      B. 直线  $L$  与平面  $\pi$  垂直  
 C. 直线  $L$  在平面  $\pi$  上      D. 直线  $L$  与平面  $\pi$  斜交
18. 设  $z = e^{x^2+y^2}$ , 则  $dz =$  ( )  
 A.  $e^{x^2+y^2} (xdx + ydy)$       B.  $2e^{x^2+y^2} (xdx + ydy)$   
 C.  $2e^{x^2+y^2} (ydx + xdy)$       D.  $2e^{x^2+y^2} (dx^2 + dy^2)$
19. 函数  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  的极值点是函数的 ( )  
 A. 可微点      B. 不可微点      C. 驻点      D. 间断点
20.  $\int_0^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \cos y dy =$  ( )  
 A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{2}{3}$       C. 1      D.  $-\frac{2}{3}$
21. 设  $I = \int_0^2 dy \int_{2y}^{2y} f(x, y) dx$ , 更换积分次序后,  $I =$  ( )  
 A.  $\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy$       B.  $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy$   
 C.  $\int_0^2 dx \int_{2x}^{2x} f(x, y) dy$       D.  $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy$
22. 若曲线  $L$  是上半圆  $x^2 + y^2 = a^2 (y > 0)$ , 取顺时针方向, 则  $\int_L y dx - x dy$  的值为 ( )



- A. 0      B.  $\frac{\pi}{2}a^2$       C.  $\pi a^2$       D.  $-\frac{\pi}{2}a^2$

23. 数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [1 - \cos \frac{a}{n}]$  (其中  $a$  为常数) 是 ( )

- A. 绝对收敛的      B. 条件收敛的  
C. 发散      D. 敛散性根据  $a$  确定

24. 函数  $y = C \sin x$  (其中  $C$  为任意常数) 是微分方程  $y'' + y = 0$  的 ( )

- A. 通解      B. 特解      C. 解      D. 不是解

25. 微分方程  $y'' + 2y' + y = 0$  的通解为 ( )

- A.  $C_1 e^{-x} + C_2 e^x$       B.  $C_1 + C_2 e^{-x}$   
C.  $C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}$       D.  $(C_1 + C_2 x) e^{-x}$

## 二、填空题(每小题 2 分,共 30 分)

1. 设  $f(e^x) = x (x > 0)$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

2. 设  $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ ax^2 + b & x > 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $b =$  \_\_\_\_\_.

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} =$  \_\_\_\_\_.

4. 设  $y = \ln(\ln^2 x)$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_.

5. 设  $y = f(\sin x^2)$ ,  $f$  为可导数, 则  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_.

6. 若  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ , 则  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_.

7. 曲线  $y = x[\frac{\pi}{2} - \arctan x]$  的水平渐近线是 \_\_\_\_\_.

8. 若  $f(x)$  的一个原函数是  $e^x + \sin x$ , 则  $f'(x) =$  \_\_\_\_\_.

9.  $\int \frac{dx}{x(1+x)} =$  \_\_\_\_\_.

10.  $\int_0^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx =$  \_\_\_\_\_.

11. 若直线  $L: \frac{x-1}{m} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-1}$  与平面  $\pi: x - 2y + z - 1 = 0$  平行, 则  $m =$  \_\_\_\_\_.

12. 设  $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$ , 则  $f'_x(1, 2, 0) =$  \_\_\_\_\_.

13. 若函数  $z = z(x, y)$  由方程  $e^z - xyz = 0$  确定, 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  \_\_\_\_\_.

14. 设区域  $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , 则积分  $\iint_D e^{x+y} dx dy =$  \_\_\_\_\_.

15. 微分方程  $y' + my = n$  (其中  $m, n$  为常数, 且  $m \neq 0$ ) 则满足条件  $y(0) = 0$  的特解为 \_\_\_\_\_.

## 三、判断是非题(每小题 2 分,共 10 分,判断下述结论是否正确,若正确的划“√”否则请划“×”)

1. 定义在关于原点对称的区间上的任何函数  $f(x)$  均可表示为一个偶函数和一个奇函数之和. ( )

2. 设函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的导数不存在, 则曲线  $y = f(x)$  在  $(x_0, f(x_0))$  处无切线. ( )
3. 若  $f(x)$  与  $g(x)$  均在  $x = x_0$  处取得极大值, 则  $f(x)g(x)$  在  $x = x_0$  处也取得极大值. ( )
4. 若  $\iint_D f(x, y) d\sigma \geq 0$ , 则  $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$ . ( )
5. 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛. ( )

#### 四、计算题 (每小题 5 分, 共 40 分)

1. 求  $\lim_{x \rightarrow -1} [\frac{3}{x^3 + 1} - \frac{1}{x + 1}]$
2. 设  $y = 3^{\tan^{-1} x}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .
3. 计算  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}$
4. 计算  $\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x dx$
5. 设  $z = y^3 + xf(x, y)$ , 其中  $f(x, y)$  为可微函数, 求  $dz$ .
6. 设  $D$  是由直线  $x = 1, y = 2, y = x - 1$  所围成区域, 求  $\iint_D \cos y^2 dx dy$ .
7. 将函数  $f(x) = \ln(1 + x)$  展开  $x - 1$  的幂级数, 并写出收敛区间.
8. 求微分方程  $(y - x \sin x) dx + x dy = 0$  的通解.

#### 五、应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 求函数  $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$  的单调区间、极值、凹凸区间及拐点.
2. 设过曲线  $y = x^2 (x \geq 0)$  上的点  $P(x_0, y_0)$  作一切线, 使得曲线、切线及  $x$  轴所围图形的面积为  $\frac{1}{12}$ .

- (1) 求切点  $P$  的坐标  $(x_0, y_0)$  (2) 求切线方程

#### 六、证明题 (6 分)

试证: 对任意自然数  $n > 1$ , 方程  $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内有唯一实数根.

### 02 试卷答案及提示

#### 一、单项选择题

1. B 2. A 3. D 4. C 5. C 6. D 7. D 8. B 9. C 10. A 11. D 12. B  
13. C 14. A 15. D 16. A 17. B 18. B 19. B 20. B 21. D 22. C 23. A  
24. C 25. D

23. 提示:  $\because \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{a}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin^2 \frac{a}{2n}$  而有  $2 \sin^2 \frac{a}{2n} \leq 2 (\frac{a}{2n})^2$

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{a^2}{4n^2} = \frac{a^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  是收敛的, 由比较法知  $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin^2 \frac{a}{2n}$  收敛

$\therefore$  原级数绝对收敛

## 二、填空题

1.  $\ln x$     2. 1    3.  $\frac{2}{3}$     4.  $\frac{2}{x \ln x} dx$     5.  $2x \cos x^2 f'( \sin x^2 )$     6.  $-(\frac{y}{x})^{\frac{1}{3}}$   
 7.  $y = 1$     8.  $e^x - \sin x$     9.  $\ln \left| \frac{x}{1+x} \right| + C$     10.  $\frac{\pi}{2}$     11. 5    12. 1  
 13.  $\frac{z}{xz-x}$     14.  $(e-1)^2$     15.  $y = \frac{n}{m} - \frac{n}{m} e^{-mx}$

## 三、判断是非题

1.  $\checkmark$     2.  $\times$     3.  $\times$     4.  $\times$     5.  $\checkmark$

## 四、计算题

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} (\frac{3}{x^3+1} - \frac{1}{x+1}) = 1$     2.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\ln 3}{x^2} \cdot 3^{\ln x + \frac{1}{x}} \sec^2 \frac{x+1}{x}$   
 3.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$   
 4.  $\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \ln 2$   
 5.  $dz = [xf'(x,y) + f(x,y)]dx + [3y^2 + xf'(x,y)]dy$   
 6.  $\iint_D \cos^2 y dx dy = \frac{1}{2} \sin 4$   
 7.  $f(x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n n} (x-1)^n \quad (-1 < x \leq 3)$   
 8.  $y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x} \quad (C \text{ 为任意常数})$

## 五、应用题

1. 单调增区间  $(-\infty, -2), (0, +\infty)$     单调减区间  $(-2, -1), (-1, 0)$   
 极大值 -3, 极小值 1  
 在  $(-\infty, -1)$  上凸的,  $(-1, +\infty)$  上凹的, 无拐点.  
 列表如下:

$x$	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-2	-	+	2	+
$f(x)$		-3			1	

2. (1) 切点 (1, 1)    (2) 切线方程  $y = 2x - 1$

## 六、证明题

提示: 构造函数  $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$      $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$

内有  $f'(x) > 0$ , 即单调上升且有  $f(\frac{1}{2})f(1) < 0$  由零点定理知方程在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内有唯一实根.

## 2003 年河南省普通高等学校 选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试

### 《高等数学》试卷

一、单项选择题 (每小题 2 分, 共 60 分) 在每小题的备选答案中选出一个正确答案, 并将其代码写在题后的括号内. 不选、错选或多选者, 该题无分.

1. 函数  $y = \sqrt{\ln(x-1)}$  的定义域是 ( )  
 A.  $(1, +\infty)$       B.  $(2, +\infty)$       C.  $[2, +\infty)$       D. 空集
2. 函数  $y = 1 - \arctan x$  是 ( )  
 A. 单调增加且有界函数      B. 单调减少且有界函数  
 C. 奇函数      D. 偶函数
3. 下列等式成立的是 ( )  
 A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = 1$       B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$   
 C.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$       D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$
4. 当  $x \rightarrow 0$  时, 无穷小量  $1 - \cos x^2$  是  $x^4$  的 ( )  
 A. 等价无穷小      B. 同阶无穷小  
 C. 较高阶无穷小      D. 较低阶无穷小
5.  $x = 0$  是函数  $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} - 1$  的 ( )  
 A. 连续点      B. 可去间断点  
 C. 跳跃间断点      D. 第二类间断点
6. 下列方程在  $[0, 1]$  上有实根的是 ( )  
 A.  $\sin x + x - \frac{1}{2} = 0$       B.  $x^2 + 3x + 1 = 0$   
 C.  $\arcsin x + 3 = 0$       D.  $x - \sin x + \frac{1}{2} = 0$
7. 若  $f(x)$  在  $x_0$  处不连续, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处 ( )  
 A. 必定不可导      B. 一定可导  
 C. 可能可导      D. 极限一定不存在
8. 曲线  $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$  ( )  
 A. 有水平渐近线, 无垂直渐近线      B. 无水平渐近线, 有垂直渐近线  
 C. 无水平渐近线, 也无垂直渐近线      D. 有水平渐近线, 也有垂直渐近线
9. 已知  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =$  ( )  
 A. 2      B. 1      C. 0      D.  $\infty$
10. 若  $y = \sin e^{-x}$ , 则有 ( )  
 A.  $dy = \cos e^{-x} dx$       B.  $dy = e^{-x} \cdot \sin e^{-x} dx$   
 C.  $dy = -e^{-x} \cdot \cos e^{-x} dx$       D.  $dy = e^{-x} \cdot \cos e^{-x} dx$

11. 设  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$  则  $\frac{dy}{dx} =$  ( )  
 A.  $\frac{1}{2t}$  B.  $2t$  C. 1 D.  $t$
12. 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导, 且  $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内 ( )  
 A. 单调增加且是凸的 B. 单调增加且是凹的  
 C. 单调减少且是凸的 D. 单调减少且是凹的
13. 已知  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导, 且  $f'(x) < 0, f(0) > 0$ , 则方程  $f(x) = 0$  在  $[0, +\infty)$  上 ( )  
 A. 有唯一根 B. 至少存在一个根  
 C. 不能确定有根 D. 没有根
14.  $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$  的极值点个数是 ( )  
 A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个
15. 下列函数中, 在  $[1, e]$  上满足拉格朗日中值定理条件的是 ( )  
 A.  $\ln \ln x$  B.  $\ln x$  C.  $\frac{1}{\ln x}$  D.  $|x - 2|$
16. 若  $f(x)$  的一原函数为  $\ln 2x$ , 则  $f'(x) =$  ( )  
 A.  $2x \cdot \ln 2x$  B.  $\ln 2x$  C.  $\frac{1}{x}$  D.  $-\frac{1}{x^2}$
17.  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} f'(\sqrt{x}) dx =$  ( )  
 A.  $f(\sqrt{x})$  B.  $2f(\sqrt{x}) + c$  C.  $2f(\sqrt{x})$  D.  $\frac{1}{2}f(\sqrt{x}) + c$
18. 设函数  $\Phi(x) = \int_0^x t \cdot e^{-t} dt$ , 则  $\Phi'(x) =$  ( )  
 A.  $x \cdot e^{-x}$  B.  $-x \cdot e^{-x}$  C.  $2x^3 \cdot e^{-x^2}$  D.  $-2x^3 \cdot e^{-x^2}$
19. 下列广义积分收敛的是 ( )  
 A.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  B.  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$  C.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$  D.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$
20. 直线  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$  与平面  $x+2y-z+3=0$  的位置关系是 ( )  
 A. 互相垂直 B. 互相平行但直线不在平面上  
 C. 直线在平面上 D. 斜交
21. 方程  $x = \ln \frac{z}{y}$  确定二元隐函数  $z = f(x, y)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  ( )  
 A. 1 B.  $e^x$  C.  $y \cdot e^x$  D.  $y$
22. 设  $z = x^3 - 3x - y$ , 则它在点  $(1, 0)$  处 ( )  
 A. 取得极大值 B. 无极值  
 C. 取得极小值 D. 无法判定是否有极值
23. 设  $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  则  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy =$  ( )  
 A.  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^4 r^2 dr$  B.  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^4 r dr$  C.  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 dr$  D.  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r dr$

24. 设  $D$  由直线  $x + y = 1, x = 0, y = 0$  所围成, 则  $\iint_D e^{x+y} d\sigma =$  ( )

- A. 1 B.  $2e$  C.  $e - 1$  D.  $2e - 1$

25. 设  $D: (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ , 则  $\iint_D x dy =$  ( )

- A.  $3\pi$  B.  $4\pi$  C.  $\pi$  D.  $\pi^2$

26. 设  $L$  为从点  $(1, 1)$  到点  $(0, 0)$  的直线段, 则  $\int_L (x^2 - y^2) dx + xy dy =$  ( )

- A.  $\frac{1}{3}$  B. 3 C. 0 D.  $-\frac{1}{3}$

27. 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  满足下列哪一个条件时必定收敛 ( )

- A.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} < 1$

- C.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$  D.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$

28.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3}{n}$  收敛性为 ( )

- A. 发散 B. 条件收敛 C. 绝对收敛 D. 无法确定

29. 下列微分方程中, 通解为  $y = (c_1 + c_2 x) \cdot e^{-3x}$  的二阶常系数齐次线性微分方程是 ( )

- A.  $y'' - 6y' + 9y = 0$  B.  $y'' + 6y' + 9y = 0$   
C.  $y'' + 6y' + 9y = 1$  D.  $y'' + 6y' = 0$

30. 微分方程  $y \cdot \ln x dx = x \cdot \ln y dy$  满足  $y|_{x=1} = 1$  的特解是 ( )

- A.  $\ln^2 x + \ln^2 y = 0$  B.  $\ln^2 x + \ln^2 y = 1$   
C.  $\ln^2 x = \ln^2 y$  D.  $\ln^2 x = \ln^2 y + 1$

## 二、填空题(每小题 2 分,共 30 分)

1. 设  $f(x) = \arctan x, g(x) = \sin \frac{2x + \pi}{3}$ , 则  $g[f(-1)] =$  .

2. 函数  $f(x) = 1 - \ln(2x + 1)$  的反函数  $f^{-1}(x) =$  .

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(1+x) - \ln x] =$  .

4. 若  $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^3}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a =$  .

5. 已知  $y = \sin x$ , 则  $y^{(10)} =$  .

6. 设  $x^2 y - e^{2x} = \sin y$ , 则  $\frac{dy}{dx} =$  .

7. 设  $y = f(\ln \tan x)$ , 且  $f(x)$  可微, 则  $\frac{dy}{dx} =$  .

8. 曲线  $y = \frac{1}{x}$  在点  $(1, 1)$  的切线方程为 .

9. 函数  $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$  在  $[-1, 2]$  上的最大值为 .

10. 曲线  $y = 6x^2 - x^3$  的拐点为 .

11.  $\int_{-2}^2 x \cdot e^{1+x} dx =$  .

12. 由向量  $\vec{a} = \{2, 2, 1\}$ ,  $\vec{b} = \{4, 5, 3\}$  为邻边构成的平行四边形面积为\_\_\_\_\_.

13. 设  $z = \ln(x^2 + y^2)$ , 则  $dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} =$ \_\_\_\_\_.

14. 若  $I = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$  则交换积分顺序后  $I =$ \_\_\_\_\_.

15. 微分方程  $y''' = 24x$  通解为\_\_\_\_\_.

三、计算题(每小题 5 分,共 40 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

2. 求函数  $y = \left( \frac{x}{1+x} \right)^x$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

3. 计算  $\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ .

4. 计算  $\int_{\frac{1}{e}}^e | \ln x | dx$ .

5. 设  $z = f(\sqrt{x^2 - y^2}, e^{\frac{1}{x}})$  且  $z = f(u, v)$  可微, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

6. 计算  $\iint_D \frac{\cos y}{y} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = x$  和  $y^2 = x$  所围成的区域.

7. 将函数  $f(x) = \frac{1}{3-x}$  展开为  $x-1$  的幂级数并写出其收敛域.

8. 求微分方程  $e^{x^2} \cdot \frac{dy}{dx} + 2xy \cdot e^{x^2} = x$  的通解.

四、应用题(每小题 7 分,共 14 分)

1. 某工厂生产两种产品甲和乙, 出售单价分别为 10 元和 9 元, 生产甲产品  $x$  件与生产乙产品  $y$  件的总费用是  $400 + 2x + 3y + 0.01(3x^2 + xy + 3y^2)$  元. 问两种产品的产量各多少件时, 能够取得最大利润?

2. 平面图形  $D$  由曲线  $y = \sqrt{x}$ , 直线  $y = x - 2$  及  $x$  轴所围成.

(1) 求此平面图形的面积;

(2) 求此平面图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体体积.

五、证明题(6 分)

证明: 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时  $\cos x < \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 1$ .

### 03 试卷答案及提示

#### 一、单项选择题

1. C 2. B 3. C 4. B 5. D 6. A 7. A 8. B 9. B 10. C 11. A 12. A 13. C 14. C  
15. B 16. D 17. B 18. C 19. D 20. C 21. C 22. B 23. C 24. A 25. C 26. D  
27. C 28. B 29. B 30. C

13 题提示:  $\because f'(x) < 0 \therefore f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内单调减少

而  $f(0) > 0$ , 说明函数  $f(x)$  图象从  $y$  正半轴上一点处单调下降, 但不定与  $x$  轴相交, 可能是以  $x$  轴为渐近线, 如:  $f(x) = e^{-x}$  故应选“C”

#### 二、填空题

$$1. \frac{1}{2} \quad 2. \frac{1}{2}e^{1-x} - \frac{1}{2}(x \in R) \quad 3. 1 \quad 4. \frac{1}{3} \quad 5. -\sin x \quad 6. 2 \frac{e^{2x} - xy}{x^2 - \cos y}$$

$$7. \frac{f'(lntanx)}{\cos x \sin x} \quad 8. x + y - 2 = 0 \quad 9. f(2) = 2 - \ln 5 \quad 10. (2, 16) \quad 11. 0 \quad 12. 3$$

$$13. dx + dy \quad 14. \int_0^1 dy \int_y^e f(x, y) dx \quad 15. y = x^4 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

### 三、计算题

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$2. \frac{dy}{dx} = \left( \frac{1}{1+x} + \ln \frac{x}{1+x} \right) \left( \frac{x}{1+x} \right)^x$$

$$3. \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C (C \text{ 任意常数}).$$

提示:换元积分  $x = \tan t \left( -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$

$$4. \int_1^e |\ln x| dx = -\int_1^e \ln x dx + \int_1^e \ln x dx \text{ 分部 } 2 \left( 1 - \frac{1}{e} \right)$$

$$5. \frac{\partial z}{\partial x} = f'_u(u, v) \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + f'_v(u, v) e^{\frac{1}{y}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -f'_u(u, v) \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{x}{y^2} e^{\frac{1}{y}} f'_v(u, v)$$

$$6. \iint_D \frac{\cos y}{y} = 1 - \cos 1$$

$$7. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}} \quad (-1 < x < 3)$$

$$8. y = \left( \frac{x^2}{2} + c \right) e^{-x^2} \quad (C \text{ 为任意常数.})$$

### 四、应用题

1. 甲产品 120 件 乙产品 80 件时取得最大利润

2. (1)  $\frac{10}{3}$  (2)  $\frac{16}{3}\pi$

### 五、证明题

提示:构造函数  $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 1 - \cos x$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - x + \sin x \quad f''(x) = x - 1 + \cos x = x - 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 时 } \sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2} \quad \therefore \left( \sin \frac{x}{2} \right)^2 < \left( \frac{x}{2} \right)^2$$

$$\text{故 } f''(x) = x - 2\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 > x - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 0$$

$$\therefore f'(x) \text{ 在 } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上是增函数 而 } f'(0) = 0 \quad \therefore f'(x) > 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上也是增函数 故有 } f(x) > f(0) = 0 \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{即 } \cos x < \frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{2} + 1$$



2004 年河南省普通高等学校  
选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试

《高等数学》试卷

一、单项选择题 (每小题 2 分, 共 50 分) 在每小题的备选答案中选出一个正确答案, 并将其代码写在题干后面的括号内. 不选、错选或多选者, 该题无分.

1. 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\ln x}$  的定义域是 ( )  
A.  $(-2, 2)$       B.  $[0, 1) \cup (1, 2]$       C.  $(-2, 1) \cup (1, 2)$       D.  $(0, 1) \cup (1, 2)$
2. 函数  $y = \sin \frac{1}{x}$  是定义域内的 ( )  
A. 周期函数      B. 单调函数      C. 有界函数      D. 无界函数
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{x}{n} =$  ( )  
A.  $x$       B. 0      C.  $\infty$       D. 1
4. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \sin x$  是比  $x^2$  的 ( )  
A. 低阶无穷小      B. 高阶无穷小  
C. 等价无穷小      D. 同阶但非等价无穷小
5. 设  $f(x) = \frac{\arcsin(x-1)}{x^2-1}$ , 则  $x=1$  是  $f(x)$  的 ( )  
A. 连续点      B. 可去间断点      C. 跳跃间断点      D. 第二类间断点
6. 设  $f'(x)$  在点  $x_0$  的某个邻域内存在, 且  $f(x_0)$  为  $f(x)$  的极大值, 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0)}{h} =$  ( )  
A. 0      B. 1      C. 2      D. -2
7. 下列函数中, 在  $x=1$  处连续但不可导的是 ( )  
A.  $y = \frac{x-1}{x^2-1}$       B.  $y = |x-1|$       C.  $y = \cot(x-1)$       D.  $y = x^2 - x$
8. 下列函数中, 在  $[-1, 1]$  上满足罗尔定理条件的是 ( )  
A.  $\ln x^2$       B.  $|x|$       C.  $\cos x$       D.  $\frac{1}{x^2-1}$
9. 设  $f(x)$  在  $x=3$  的某个邻域内有定义, 若  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x-3)^2} = -1$ , 则在  $x=3$  处 ( )  
A.  $f(x)$  的导数存在且  $f'(3) \neq 0$       B.  $f(x)$  的导数不存在  
C.  $f(x)$  取得极小值      D.  $f(x)$  取得极大值
10. 曲线  $y = \frac{x^2+2}{(x-2)^3}$  的渐近线有 ( )  
A. 1 条      B. 2 条      C. 3 条      D. 0 条
11. 下列函数对应的曲线在定义域内凹的是 ( )  
A.  $y = e^{-x}$       B.  $y = \ln(1+x^2)$       C.  $y = x^2 - x^3$       D.  $y = \sin x$
12. 下列函数中, 可以作为同一个函数的原函数的是 ( )

- A.  $\frac{1}{2}\sin x^2$  和  $\frac{1}{4}\cos 2x$  B.  $\ln|\ln x|$  和  $2\ln x$
- C.  $\frac{1}{2}\sin x^2 x$  和  $-\frac{1}{4}\cos 2x$  D.  $\tan^2 \frac{x}{2}$  和  $\csc^2 \frac{x}{2}$
13. 下列等式正确的是 ( )
- A.  $\int f'(x) dx = f(x)$  B.  $d \int f(x) = f(x) + C$
- C.  $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$  D.  $d \int f(x) dx = f(x)$
14. 设  $f'(x)$  为连续函数, 则  $\int_0^1 f'(\frac{x}{2}) dx =$  ( )
- A.  $2[f(\frac{1}{2}) - f(0)]$  B.  $2[f(1) - f(0)]$
- C.  $\frac{1}{2}[f(\frac{1}{2}) - f(0)]$  D.  $\frac{1}{2}[f(1) - f(0)]$
15. 下列广义积分收敛的是 ( )
- A.  $\int_e^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$  B.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$
- C.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}} dx$  D.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \cdot (\ln x)^2} dx$
16. 若  $z = e^{xy}$ , 则  $dz|_{(1,2)} =$  ( )
- A.  $e^{xy}(ydx + xdy)$  B.  $3e^2$  C.  $2e^2 dx + e^2 dy$  D. 0
17. 设  $f(x, y) = (x - 4)^2 + y^2$ , 则点  $(4, 0)$  ( )
- A. 不是驻点 B. 是驻点但非极值点
- C. 极大值点 D. 极小值点
18. 设区域  $D$  由  $y$  轴及直线  $y = x, y = 1$  所围成, 则  $\iint_D x dx dy =$  ( )
- A. 1 B.  $\frac{1}{2}$  C.  $\frac{1}{3}$  D.  $\frac{1}{6}$
19. 直线  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$  和直线  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{2}$  的关系是 ( )
- A. 平行但不重合 B. 重合 C. 垂直不相交 D. 垂直相交
20. 方程  $2x^2 - y^2 = 1$  表示的二次曲面是 ( )
- A. 球面 B. 旋转抛物面 C. 柱面 D. 圆锥面
21. 下列级数中, 绝对收敛的是 ( )
- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$  B.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\frac{3}{2})^n$
- C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}$  D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n}$
22. 下列级数中, 发散的是 ( )
- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2}$  B.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1}$
- C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{4})^n$  D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^3$

23. 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$  的和为 ( )

- A. 0      B. e      C.  $e^2$       D. 不存在

24. 用待定系数法求方程  $y'' - 2y' + y = xe^x$  的特解  $y^*$  时, 下列特解设法正确的是 ( )

- A.  $y^* = (ax^2 + bx + c)e^x$       B.  $y^* = x(ax^2 + bx + c)e^x$   
C.  $y^* = x^2(ax + b)e^x$       D.  $y^* = x^2(ax^2 + bx + c)e^x$

25. 设  $L$  为从点  $A(1, 0)$  沿  $x$  轴到点  $B(-1, 0)$  的直线段, 则  $\int_L y^2 dx =$  ( )

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

## 二、填空题 (每小题 2 分, 共 30 分)

1. 设  $f(\frac{x+1}{x}) = \frac{x+1}{x^2}$ , ( $x \neq 0$ ), 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

2. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2} + x_n + x_{n-2}}{3} =$  \_\_\_\_\_.

3. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

4. 设  $y = x^3 + 5x^2 + e^{2x}$ , 则  $y^{(10)} =$  \_\_\_\_\_.

5. 设  $\begin{cases} x = t^2 \\ y = e^t \end{cases}$ , 则  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$  \_\_\_\_\_.

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin 2t dt}{x^4} =$  \_\_\_\_\_.

7.  $y = x^3 - 27x + 2$  在  $[0, 1]$  上的最大值为 \_\_\_\_\_.

8. 设  $f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sin t dt$ , 则  $f(f(\frac{\pi}{2})) =$  \_\_\_\_\_.

9.  $\int_1^e \ln x dx =$  \_\_\_\_\_.

10. 设  $e^x$  为  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int e^{-x^2} \cdot f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

11. 广义积分  $\int_0^1 \frac{1}{x^{1+q}} dx$ , 当 \_\_\_\_\_ 时收敛.

12. 过原点且与直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-3}$  垂直的平面方程为 \_\_\_\_\_.

13. 设  $z = e^x + \frac{y^2}{x}$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$  \_\_\_\_\_.

14.  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 y d\sigma =$  \_\_\_\_\_.

15. 设  $f(x, y) = \frac{2x+y}{\ln(3-x^2-y^2)}$ , 则  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) =$  \_\_\_\_\_.

三、判断是非题 (每小题 2 分, 共 10 分. 判断下述结论是否正确, 若正确的请划“√”, 否则请划“×”)

1. 若  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 则  $[f(x)]$  在点  $x = x_0$  处一定连续 ( )

2. 若数列  $\{x_n\}$  有界, 则  $\{x_n\}$  必收敛. ( )

3. 方程  $\frac{1}{x} \ln(x+1) = 0$  在  $[1, e-1]$  上无实根. ( )

4.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ . ( )

5. 若二元函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个偏导数都存在, 则  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微 ( )

四、计算题 (每小题 5 分, 共 40 分)

1. 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{x+1}$

2. 设  $y = y(x)$  是由方程  $x^2 e^y + y^2 = 1$  所确定的函数, 求  $\frac{dy}{dx} \Big|_{(1,0)}$

3. 计算  $\int x^3 \cos x^2 dx$

4. 计算  $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

5. 设  $z = f(x+y, xy)$  可微, 求全微分  $dz$ .

6. 计算  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx$ .

7. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x+1)^{2n}$  的收敛区间 (不考虑端点的情况).

8. 求方程  $y'' - y = 0$  的积分曲线, 使其在点  $(0, 0)$  处与直线  $y = x$  相切.

五、应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 某地域人口总数为 50 万, 为在此地域推广某项新技术, 先对其中 1 万人进行培训, 使其掌握此项新技术, 并开始在此地域推广. 设经过时间  $t$ , 已掌握此新技术人数为  $x(t)$  (将  $x(t)$  视为连续可微变量), 其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比, 且比例常数为  $k$  ( $k > 0$ ), 求  $x(t)$ .

2. 过点  $P(1, 0)$  作抛物线  $y = \sqrt{x-2}$  的切线, 该切线与上述抛物线及  $x$  轴围成一平面图形, 求此图形绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体的体积.

六、证明题 (6 分)

证明: 当  $x > 0$  时,  $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

## 04 试卷答案及提示

### 一、单项选择题

1. D 2. C 3. A 4. B 5. B 6. A 7. B 8. C 9. D 10. B 11. A 12. C 13. C 14. A  
15. D 16. C 17. D 18. D 19. A 20. C 21. C 22. A 23. C 24. C 25. A

9 提示:  $\because \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x-3)^2} = -1 < 0 \Rightarrow \exists$  一个邻域  $\cup (3, \delta)$  使得

$\frac{f(x) - f(3)}{(x-3)^2} < 0$  即在邻域  $\cup (3, \delta)$  内有  $f(x) < f(3)$ , 从而  $f(3)$  是  $f(x)$  的一个极大值.  $f(x)$

在  $x = 3$  处的导数可能是  $f'(3) = 0$  但一定不会有  $f'(3)$  存在且  $f'(3) \neq 0$ .

这是因为  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \cdot \frac{1}{x-3} = -1$  即  $f'(3) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = -1$  这是不可能的, 综述应选 D

### 二、填空题

1.  $x(x-1)$  2. 1 3.  $\frac{1}{2}$  4.  $1024e^{23}$

$$5. \frac{(t-1)e^t}{4 \cdot t^3} \text{ 提示: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t}{2t}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^t}{2t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{e^t}{2t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{e^t \cdot 2t - 2e^t}{4t^2} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{(t-1)}{4t^3} e^t$$

$$6. 1 \quad 7. 2 \quad 8. -1 \quad 9. 1 \quad 10. x^2 + C$$

$$11. q < 0 \text{ 提示: 当 } q = 0 \text{ 时 } \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = \infty \text{ 发散.}$$

$$\text{当 } q \neq 0 \text{ 时 } \int_0^1 \frac{1}{x^{1+q}} dx = -\frac{1}{qx^q} \Big|_0^1 = -\frac{1}{q} - \frac{1}{q} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^q} = \begin{cases} -\frac{1}{q} & q < 0 \\ \infty & q > 0 \end{cases}$$

$$12. 2x + y - 3z = 0 \quad 13. -\frac{2y}{x^2}$$

$$14. 0 \quad \text{提示: } \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 y d\sigma = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \cdot r^4 d\theta = -\int_0^1 r^4 dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\cos \theta$$

$$= -\frac{1}{5 \cdot 3} \cos^3 \theta \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad 15. \frac{2}{\ln 2}$$

### 三、判断题

$$1. \times \quad 2. \times \quad 3. \checkmark \quad 4. \times \quad 5. \times$$

1 题提示: 反例:  $f(x) = \ln x$  在  $x = \frac{1}{2}$  处连续, 而  $[f(x)] = \ln(\ln x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  处无定义,

所以  $[f(x)]$  在  $x = \frac{1}{2}$  处不连续.

$$3 \text{ 题提示: 构造函数 } f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ 有 } f'(x) = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

$$\text{设 } g(x) = x - (x+1)\ln(x+1) \text{ 有 } g'(x) = -\ln(x+1)$$

$$\text{故在 } [0, +\infty) \text{ 内有 } g'(x) < 0$$

$$\therefore g(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上减函数 有 } g(x) > g(0) = 0$$

$$\text{所以在 } [1, e-1] \text{ 内总有 } f'(x) > 0$$

$$\text{即 } f(x) \text{ 在 } [1, e-1] \text{ 是单调上升 而 } f(1) > 0, f(e-1) > 0$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ 在 } [1, e-1] \text{ 无实数根}$$

### 四、计算题

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+1} = e^{-2} \quad 2. \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,0)} = -2$$

$$3. \int x^3 \cos x^2 dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x^2 + \frac{1}{2} \cos x^2 + c$$

$$4. \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$5. dz = (f'_1 + yf'_2) dx + (f'_1 + xf'_2) dy$$

$$6. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 dr = \frac{\pi}{6}$$

$$7. l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{2} (x+1)^2$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} (x+1)^2 < 1 \text{ 即 } -1 - \sqrt{2} < x < \sqrt{2} - 1 \text{ 时, 收敛}$$

当  $\frac{1}{2}(x+1)^2 > 1$  即  $x > \sqrt{2} - 1$  或  $x < -1 - \sqrt{2}$  时, 发散

所求幂级数收敛区间与  $(-1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$

$$8. y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

### 五、应用题

$$1. x(t) = \frac{50e^{50kt}}{49 + e^{50kt}} \quad t \in [0, +\infty)$$

提示: 由题意知  $x'(t) = kx(t)(50 - x(t))$  且  $x(0) = 1$

这是一个阶微分方程, 分离变量  $\frac{dx}{x(50-x)} = kdt$

$$\text{两端积分, } \int \frac{dx}{x(50-x)} = \int kdt \quad \text{即有: } \int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{50-x} \right) dx = 50k \int dt$$

$$\therefore \ln|x| - \ln|50-x| = 50kt + C_1$$

$$\text{即 } \ln \left| \frac{x}{50-x} \right| = 50kt + C_1$$

$$\therefore \frac{x}{50-x} = \pm e^{50kt+C_1} = Ce^{50kt} \quad (C = \pm e^{C_1})$$

$$\therefore x = \frac{50Ce^{50kt}}{1 + Ce^{50kt}} \quad \text{把 } x(0) = 1 \text{ 代入得 } C = \frac{1}{49}$$

$$\text{故所求函数 } x(t) = \frac{50e^{50kt}}{49 + e^{50kt}} \quad (t \geq 0)$$

$$2. \frac{1}{6}\pi \quad \text{提示: 如图所示}$$

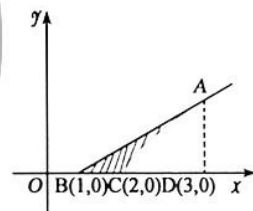
$$\text{设切点为 } (x_0, y_0) \text{ 有 } k = y'|_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$$

$$\text{切线方程 } y - y_0 = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x - x_0)$$

$$\text{有方程组 } \begin{cases} -y_0 = \frac{1-x_0}{2\sqrt{x_0-2}} \\ y_0 = \sqrt{x_0-2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{解得切点 } A(3, 1), \text{ 切线方程为 } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$V = V_{\text{锥}} - V_{ABC} = \frac{2}{3}\pi - \pi \int_2^3 (\sqrt{x-2})^2 dx = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi$$



### 六、证明题

提示: 构造函数  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , 验证  $f'(x) > 0$ , 即可.

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right)$$

显然  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上  $f'(x) > 0$

故  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上是单调上升的且  $f(0) = 0$

从而当  $x > 0$  时, 有  $f(x) > f(0)$

$$\text{即 } f(x) > 0 \quad \text{故有 } \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ 成立.}$$

**2005 年河南省普通高等学校  
选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试  
高等数学 试卷**

题号	一	二	三	四	五	六	总分	核分人
分数								

得分	评卷人

**一、单项选择题 (每小题 2 分, 共计 60 分)**

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 并将其代码写

在题

干后面的括号内。不选、错选或多选者, 该题无分。

1. 函数  $y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{5-x}}$  的定义域为 ( )

A.  $x > 1$       B.  $x < 5$       C.  $1 < x < 5$       D.  $1 < x \leq 5$

解:  $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 5 \Rightarrow C.$

2. 下列函数中, 图形关于  $y$  轴对称的是 ( )

A.  $y = x \cos x$       B.  $y = x^3 + x + 1$

C.  $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$       D.  $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$

解: 图形关于  $y$  轴对称, 就是考察函数是否为偶函数, 显然函数  $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$  为偶函数, 应选 D.

3. 当  $x \rightarrow 0$  时, 与  $e^{x^2} - 1$  等价的无穷小量是 ( )

A.  $x$       B.  $x^2$       C.  $2x$       D.  $2x^2$

解:  $e^x - 1 \sim x \Rightarrow e^{x^2} - 1 \sim x^2$ , 应选 B.

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+1} =$  ( )

A.  $e$       B.  $e^2$       C.  $e^3$       D.  $e^4$

解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2} \cdot \frac{2(n+1)}{n}} = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n}} = e^2$ , 应选 B.

5. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则 常数  $a =$  ( )

A. 1      B. -1      C.  $\frac{1}{2}$       D.  $-\frac{1}{2}$

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(1+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}$ , 应选 C.

6. 设函数  $f(x)$  在点  $x=1$  处可导, 且  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = \frac{1}{2}$ , 则  $f'(1) =$  ( )

A. 1      B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $-\frac{1}{4}$

解:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = -2 \lim_{-2h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} = -2f'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{4}$ , 应

选 D.

7. 由方程  $xy = e^{x+y}$  确定的隐函数  $x(y)$  的导数  $\frac{dx}{dy}$  为 ( )

- A.  $\frac{x(y-1)}{y(1-x)}$       B.  $\frac{y(x-1)}{x(1-y)}$       C.  $\frac{y(1+x)}{x(y-1)}$       D.  $\frac{x(y+1)}{y(x-1)}$

解: 对方程  $xy = e^{x+y}$  两边微分得  $xdy + ydx = e^{x+y}(dx + dy)$ ,

$$\text{即 } (y - e^{x+y})dx = (e^{x+y} - x)dy,$$

$$(y - xy)dx = (xy - x)dy,$$

所以  $\frac{dx}{dy} = \frac{x(y-1)}{y(1-x)}$ , 应选 A.

8. 设函数  $f(x)$  具有任意阶导数, 且  $f'(x) = [f(x)]^2$ , 则  $f^{(n)}(x) =$  ( )

- A.  $n[f(x)]^{n+1}$       B.  $n![f(x)]^{n+1}$   
C.  $(n+1)[f(x)]^{n+1}$       D.  $(n+1)![f(x)]^{n+1}$

解:  $f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2[f(x)]^3 \Rightarrow f'''(x) = 2 \cdot 3f^2(x)f'(x) = 3[f(x)]^4$ ,  
.....  $\Rightarrow f^{(n)}(x) = n![f(x)]^{n+1}$ , 应选 B.

9. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理的条件是 ( )

- A.  $f(x) = 1 - x^2, [-1, 1]$       B.  $f(x) = xe^{-x}, [-1, 1]$   
C.  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}, [-1, 1]$       D.  $f(x) = |x|, [-1, 1]$

解: 由罗尔中值定理条件: 连续、可导及端点的函数值相等来确定, 只有  $f(x) = 1 - x^2, [-1, 1]$  满足, 应选 A.

10. 设  $f'(x) = (x-1)(2x+1), x \in (-\infty, +\infty)$ , 则在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内,  $f(x)$  单调 ( )

- A. 增加, 曲线  $y = f(x)$  为凹的      B. 减少, 曲线  $y = f(x)$  为凹的  
C. 增加, 曲线  $y = f(x)$  为凸的      D. 减少, 曲线  $y = f(x)$  为凸的

解: 在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内, 显然有  $f'(x) = (x-1)(2x+1) < 0$ , 而  $f''(x) = 4x - 1 > 0$ , 故函数  $f(x)$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内单调减少, 且曲线  $y = f(x)$  为凹的, 应选 B.

11. 曲线  $y = e^{-\frac{1}{x}}$  ( )

- A. 只有垂直渐近线      B. 只有水平渐近线  
C. 既有垂直渐近线, 又有水平渐近线,      D. 无水平、垂直渐近线

解:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \infty \Rightarrow x = 0$ , 应选 C.

12. 设参数方程为  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ , 则二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$  ( )

- A.  $\frac{b}{a \sin^2 t}$       B.  $-\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$   
C.  $\frac{b}{a \cos^2 t}$       D.  $-\frac{b}{a^2 \sin t \cos^2 t}$



解:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{b \cos t}{a \sin t} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \left( -\frac{b \cos t}{a \sin t} \right)'_x = \left( -\frac{b \cos t}{a \sin t} \right)'_t \times \frac{dt}{dx}$   

$$= \frac{b}{a \sin^2 t} \times \frac{1}{-a \sin t} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}, \text{ 应选 B.}$$

13. 若  $\int f(x)e^{\frac{1}{x}} dx = e^{\frac{1}{x}} + C$ , 则  $f(x) =$  ( )

A.  $-\frac{1}{x}$       B.  $-\frac{1}{x^2}$       C.  $\frac{1}{x}$       D.  $\frac{1}{x^2}$

解: 两边对  $x$  求导  $f(x)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2}$ , 应选 B.

14. 若  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , 则  $\int \cos x f(\sin x)dx =$  ( )

A.  $F(\sin x) + C$       B.  $-F(\sin x) + C$   
 C.  $F(\cos x) + C$       D.  $-F(\cos x) + C$

解:  $\int \cos x f(\sin x)dx = \int f(\sin x)d(\sin x) = F(\sin x) + C$ , 应选 A.

15. 下列广义积分发散的是 ( )

A.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$       B.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$       C.  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$       D.  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

解:  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ ;  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$ ;

$\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \Big|_e^{+\infty} = \infty$ ;  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$ , 应选 C.

16.  $\int_{-1}^1 x|x| dx =$  ( )

A. 0      B.  $\frac{2}{3}$       C.  $\frac{4}{3}$       D.  $-\frac{2}{3}$

解: 被积函数  $x|x|$  在积分区间  $[-1, 1]$  上是奇函数, 应选 A.

17. 设  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续, 则定积分  $\int_{-a}^a f(-x)dx =$  ( )

A. 0      B.  $2\int_0^a f(x)dx$       C.  $-\int_{-a}^a f(x)dx$       D.  $\int_{-a}^a f(x)dx$

解:  $\int_{-a}^a f(-x)dx \stackrel{t=-x}{=} \int_a^{-a} f(u)d(-u) = \int_{-a}^a f(u)du = \int_{-a}^a f(x)dx$ , 应选 D.

18. 设  $f(x)$  的一个原函数是  $\sin x$ , 则  $\int f'(x)\sin x dx =$  ( )

A.  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$       B.  $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$   
 C.  $\frac{1}{2}\sin^2 x$       D.  $-\frac{1}{2}\sin^2 x + C$

解:  $(\sin x)' = f(x) \Rightarrow f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

$\int f'(x)\sin x dx = -\int \sin^2 x dx = -\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ , 应选 B.

19. 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 则不正确的是 ( )

A.  $\int_a^b f(x)dx$  是  $f(x)$  的一个原函数      B.  $\int_a^x f(t)dt$  是  $f(x)$  的一个原函数  
 C.  $\int_x^a f(t)dt$  是  $-f(x)$  的一个原函数      D.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积

解:  $\int_a^b f(x)dx$  是常数, 它的导数为零, 而不是  $f(x)$ , 即  $\int_a^b f(x)dx$  不是  $f(x)$  的原函数, 应选 A.

20. 直线  $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$  与平面  $x-y-z+1=0$  的关系是 ( )

A. 垂直 B. 相交但不垂直 C. 直线在平面上 D. 平行

解:  $\vec{s} = \{1, -1, 2\}, \vec{n} = \{1, -1, -1\} \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{n}$ , 另一方面点  $(3, 0, -2)$  不在平面内, 所以应为平行关系, 应选 D.

21. 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$  存在是它在该点处可微 ( )

A. 充分条件 B. 必要条件 C. 充要条件 D. 无关条件

解: 两个偏导数存在, 不一定可微, 但可微一定有偏导数存在, 因此为必要条件, 应选 B.

22. 设  $z = \ln \frac{2x}{y}$ , 则  $dz|_{(1,2)} =$  ( )

A.  $\frac{y}{2x} dx$  B.  $\frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} dy$  C.  $dx - \frac{1}{2} dy$  D.  $dx + \frac{1}{2} dy$

解:  $z = \ln \frac{2x}{y} = \ln 2x - \ln y \Rightarrow dz = \frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy \Rightarrow dz|_{(1,2)} = dx - \frac{1}{2} dy$ , 应选 C.

23. 函数  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$  的极小值点是 ( )

A.  $(1, -1)$  B.  $(-1, 1)$  C.  $(-1, -1)$  D.  $(1, 1)$

解: 
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 1 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-1, 1), \text{应选 B.}$$

24. 二次积分  $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$  写成另一种次序的积分是 ( )

A.  $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx$  B.  $\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$   
C.  $\int_0^4 dy \int_{x^2}^2 f(x, y) dx$  D.  $\int_0^4 dy \int_2^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

解: 积分区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\} = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2\}$ , 应选 A.

25. 设  $D$  是由上半圆周  $y = \sqrt{2ax - x^2}$  和  $x$  轴所围成的闭区域, 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma =$  ( )

A.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$  B.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$   
C.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$  D.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

解: 积分区域在极坐标下可表示为:  $D = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2a \cos \theta\}$ , 从

而  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ , 应选 C.

26. 设  $L$  为抛物线  $y = x^2$  上从  $O(0, 0)$  到  $B(1, 1)$  的一段弧,  $\int_L 2xydx + x^2dy =$  ( )

- A. -1                      B. 1                      C. 2                      D. -1

解:  $L: \begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases}, x \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1,$

$$\int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 2x^3dx + 2x^3dx = \int_0^1 4x^3dx = x^4 \Big|_0^1 = 1, \text{ 应选 B.}$$

27. 下列级数中, 条件收敛的是 ( )

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$                       B.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$   
C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$                       D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

解:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$  绝对收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$  是收敛的, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$  是  $p = \frac{2}{3}$  的级数发散的, 从而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$  条件收敛, 应选 B.

28. 下列命题正确的是 ( )

- A. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$  收敛  
B. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$  收敛  
C. 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$  收敛  
D. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都收敛

解: 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$  收敛,

而  $(u_n + v_n)^2 \leq 2(u_n^2 + v_n^2)$ , 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$  收敛, 应选 C.

29. 微分方程  $(x - 2y)y' = 2x - y$  的通解为 ( )

- A.  $x^2 + y^2 = C$                       B.  $x + y = C$   
C.  $y = x + 1$                       D.  $x^2 - xy + y^2 = C^2$

解: 注意对所给的方程两边求导进行验证, 可得通解应为  $x^2 - xy + y^2 = C^2$ , 应选 D.

30. 微分方程  $\frac{d^2x}{dt^2} + \beta^2 x = 0$  的通解是 ( )

- A.  $x = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t$                       B.  $x = C_1 e^{-\beta t} + C_2 e^{\beta t}$   
C.  $x = \cos \beta t + \sin \beta t$                       D.  $x = e^{-\beta t} + e^{\beta t}$

解: 微分方程的特征方程为  $\lambda^2 + \beta^2 = 0$ , 有两个复特征根  $\lambda = \pm \beta i$ , 所以方程的通解为  $x = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t$ , 应选 A.

得分	评卷人

## 二、填空题 (每小题 2 分, 共 30 分)

1. 设  $f(x+1) = x^2 + 2$ , 则  $f(x-2) =$ \_\_\_\_\_.

解:  $f(x+1) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 3 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow$   
 $f(x-2) = x^2 - 6x + 11$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 6}{x - 2} = 5$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

解: 因  $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax - 6) = 0 \Rightarrow a = 1$ .

3. 设函数  $y = \arctan x$  在点  $(1, \frac{\pi}{4})$  处的切线方程是\_\_\_\_\_.

解:  $k = y'|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$ , 则切线方程为  $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1)$ ,

即  $x - 2y - 1 + \frac{\pi}{2} = 0$ .

4. 设  $y = x^{\frac{1}{x}} e^x$ , 则  $dy =$ \_\_\_\_\_.

解:  $y = e^{\frac{\ln x}{x} + x} \Rightarrow dy = e^{\frac{\ln x}{x} + x} d(\frac{\ln x}{x} + x) = x^{\frac{1}{x}} e^x [\frac{1 - \ln x}{x^2} + 1] dx$ .

5. 函数  $y = 2x^2 - \ln x$  的单调递增区间是\_\_\_\_\_.

解:  $y' = 4x - \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} 4x - \frac{1}{x} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2}, +\infty) \text{ 或 } [\frac{1}{2}, +\infty)$ .

6. 曲线  $y = e^{\sqrt{x}}$  的拐点是\_\_\_\_\_.

解:  $y' = e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'' = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = 1$ , 得拐点为  $(1, e)$ .

7. 设  $f(x)$  连续, 且  $\int_0^{x^3} f(t) dt = x$ , 则  $f(27) =$ \_\_\_\_\_.

解: 等式  $\int_0^{x^3} f(t) dt = x$  两边求导有  $f(x^3) 3x^2 = 1$ , 取  $x = 3$  有  $f(27) = \frac{1}{27}$ .

8. 设  $f(0) = 1, f(2) = 2, f'(2) = 3$ , 则  $\int_0^1 xf''(2x) dx =$ \_\_\_\_\_.

解:  $\int_0^1 xf''(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x df'(2x) = \frac{1}{2} xf'(2x) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 f'(2x) d2x$   
 $= \frac{1}{2} f'(2) - \frac{1}{4} f(2x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} f'(2) - \frac{1}{4} f(2) + \frac{1}{4} f(0) = \frac{5}{4}$ .

9. 函数  $y = \int_0^x te^{-t} dt$  的极小值是\_\_\_\_\_.

解:  $y' = xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ .

10.  $\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx =$ \_\_\_\_\_.

解:  $\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx = \int \frac{d(x + \cos x)}{x + \cos x} = \ln |x + \cos x| + C$ .

11. 由向量  $\vec{a} = \{1, 0, -1\}, \vec{b} = \{0, 1, 2\}$  为邻边构成的平行四边形的面积为

解:  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6} .$

12. 设  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$  \_\_\_\_\_.

解: 令  $F = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = \frac{x}{z} - \ln z + \ln y$ , 则

$$F'_x = \frac{1}{z}, F'_y = \frac{1}{y}, F'_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{z} = -\frac{x+z}{z^2} .$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{z}{x+z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{z^2}{y(x+z)}, \text{ 所以 } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z(y+z)}{y(x+z)} .$$

13. 设  $D$  是由  $y = \sqrt{1-x^2}, y = x, y = 0$ , 所围成的第一象限部分, 则  $\iint_D \left(\frac{y}{x}\right)^2 dx dy$  = \_\_\_\_\_.

解: 积分区域在极坐标系下表示为  $D = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1\}$ , 则

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{y}{x}\right)^2 dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 \theta - 1) d\theta \int_0^1 r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 \theta - 1) d\theta = \frac{1}{2} (\tan^2 \theta - \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} . \end{aligned}$$

14. 将  $f(x) = \frac{3}{2+x-x^2}$  展开为  $x$  的幂级数是 \_\_\_\_\_.

解:  $f(x) = \frac{3}{2+x-x^2} = \frac{3}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}},$

所以  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right] x^n, (-1 < x < 1).$

15. 用待定系数法求方程  $y'' - 4y' + 4y = (2x+1)e^{2x}$  的特解时, 特解应设为 \_\_\_\_\_.

解: 2 是特征方程  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$  的二重根, 且  $(2x+1)$  是一次多项式, 特解应设为  $x^2(Ax+B)e^{2x}$ .

得分	评卷人

### 三、计算题 (每小题 5 分, 共 40 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} .$

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x \sin x - \cos x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + x \sin x - \cos x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2 \sin x + x \cos x}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 \cos x - x \sin x} = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

2. 已知  $y = \left( \frac{3x-2}{5x+2} \right)$ ,  $f'(x) = \arctan x^2$ , 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ .

解: 令  $\frac{3x-2}{5x+2} = u$ , 则  $y = f(u)$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = f'(u) \left( \frac{3x-2}{5x+2} \right)' = \arctan \left( \frac{3x-2}{5x+2} \right)^2 \times \frac{16}{(5x+2)^2},$$

$$\text{所以 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \arctan 1 \times \frac{16}{2^2} = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi.$$

3. 求不定积分  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int x^2 d\sqrt{1+x^2} \\ &= x^2 \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} d(x^2) = x^2 \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) \\ &= x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

4. 设  $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0 \\ \frac{1}{2+x}, & x < 0 \end{cases}$ , 求  $\int_0^2 f(x-1) dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解: 令 } x-1=t, \text{ 则 } \int_0^2 f(x-1) dx &= \int_{-1}^1 f(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{2+t} dt + \int_0^1 \ln(1+t) dt \\ &= \ln(2+t) \Big|_{-1}^0 + t \ln(1+t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt \\ &= \ln 2 + \ln 2 - \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= 2 \ln 2 - t \Big|_0^1 + \ln(1+t) \Big|_0^1 = 3 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

5. 设  $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$ , 其中  $f(u, v)$  可微, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

解: 令  $e^x \sin y = u, x^2 + y^2 = v$ , 则  $z = f(u, v)$ , 复合关系结构如图 05-1 所示,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= e^x \sin y f'_u(u, v) + 2x f'_v(u, v), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= e^x \cos y f'_u(u, v) + 2y f'_v(u, v). \end{aligned}$$

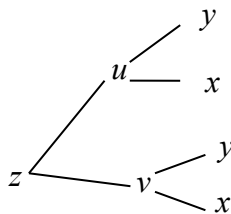


图 05-1

6. 求  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $xy=1, y=x$  及  $x=2$  所围成的闭区域.

解: 积分区域如图 05-2 所示, 曲线  $xy=1, y=x$  在第一象限内的交点为  $(1, 1)$ , 积分区域可表示为:  $1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x$ .

$$\begin{aligned} \text{则 } \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 \left( -\frac{1}{y} \right) \Big|_{\frac{1}{x}}^x dx \\ &= \int_1^2 x^2 \left[ x - \frac{1}{x} \right] dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx \\ &= \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

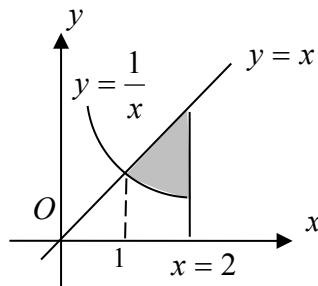


图 05-2

7. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$  的收敛域 (考虑区间端点).

解: 这是缺项的标准的幂级数,

$$\text{因为 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{(-1)^n x^{2n+1}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = x^2,$$

当  $\rho < 1$ , 即  $-1 < x < 1$  时, 幂级数绝对收敛;

当  $\rho > 1$ , 即  $x > 1$  或  $x < -1$  时, 幂级数发散;

当  $\rho = 1$ , 即  $x = \pm 1$  时,

若  $x = 1$  时, 幂级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  是交错级数, 满足来布尼兹定理的条件, 是

收敛的, 若  $x = -1$  时, 幂级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$  也是交错级数, 也满足来布尼兹定理的条件, 是收敛的.

故幂级数的收敛域为  $[-1, 1]$ .

8. 求微分方程  $(x^2 + 1)y' + 2xy - \cos x = 0$  通解.

解: 微分方程可化为  $y' + \frac{2x}{x^2 + 1} y = \frac{\cos x}{x^2 + 1}$ , 这是一阶线性非齐次微分方程, 它

对应的齐次线性微分方程  $y' + \frac{2x}{x^2 + 1} y = 0$  的通解为  $y = \frac{C}{x^2 + 1}$ .

设非齐次线性微分方程的通解为  $y = \frac{C(x)}{x^2 + 1}$ , 则  $y' = \frac{C'(x)}{x^2 + 1} - \frac{2xC(x)}{(x^2 + 1)^2}$ , 代入方

程得  $C'(x) = \cos x$ , 所以  $C(x) = \sin x + C$ .

故原微分方程的通解为  $y = \frac{\sin x + C}{x^2 + 1}$  ( $C$  为任意常数).

得分	评卷人

#### 四、应用题 (每小题 7 分, 共计 14 分)

1. 一房地产公司有 50 套公寓要出租, 当月租金定为 2000 元时, 公寓会全部租出去, 当月租金每增加 100 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 200 元的维修费. 试问租金定为多少可获得最大收入? 最大收入是多少?

解: 设每套公寓租金为  $x$  元时, 所获收入为  $y$  元,

$$\text{则 } y = \left[ 50 - \frac{x - 2000}{100} \right] (x - 200), \quad (x > 2000),$$

$$\text{整理得 } y = \frac{1}{100}(-x^2 + 7200x - 1400000),$$

$$y' = \frac{1}{100}(-2x + 7200) \text{ 均有意义,}$$

令  $y' = 0$  得唯一可能的极值点  $x = 3600$ , 而此时  $y'' = -\frac{1}{50} < 0$ , 所以  $x = 3600$  是使  $y$  达到极大值的点, 即为最大值的点.

$$\text{最大收入为 } y = [50 - \frac{3600 - 2000}{100}](3600 - 200) = 34 \times 3400 = 115600 \text{ (元).}$$

故 租金定为每套 3600 元时, 获得的收入最大, 最大收入为 115600 元.

2. 平面图形由抛物线  $y^2 = 2x$  与该曲线在点  $(\frac{1}{2}, 1)$  处法线所围成, 试求:

(1) 该平面图形的面积;

(2) 该平面图形绕  $x$  轴旋转所成的旋转体的体积.

解: 平面图形如图 05-3 所示, 切点  $A(\frac{1}{2}, 1)$  处的切线斜率为  $k = y'|_{x=\frac{1}{2}}$ ,

由  $y^2 = 2x$  得  $y' = \frac{1}{y}$ , 故  $A$  点处的切线斜率

$$k = y'|_{x=\frac{1}{2}} = y'|_{y=1} = 1,$$

从而  $A$  点处的法线斜率为  $-1$ ,

$$\text{法线方程为 } x + y - \frac{3}{2} = 0.$$

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y^2 = 2x \\ x + y - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \text{ 得另一交点 } B(\frac{9}{2}, -3).$$

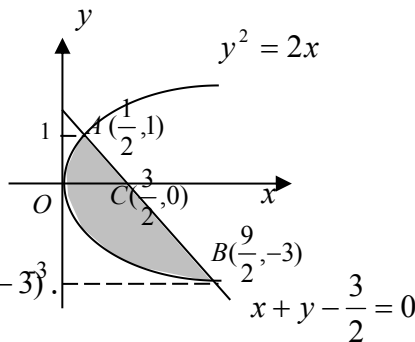


图 05-3

(1) 把该平面图形看作 Y 型区域, 其面积为

$$S = \int_{-3}^1 \left[ \left( \frac{3}{2} - y \right) - \frac{y^2}{2} \right] dy = \left( \frac{3}{2}y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-3}^1 = \frac{16}{3};$$

(2) 根据抛物线的对称性知, 该平面图形绕  $x$  轴旋转所成的旋转体的体积等于平面图形  $OBC$  绕  $x$  轴旋转所成旋转体的体积, 有

$$\text{故 } V_x = \pi \int_0^{\frac{9}{2}} 2x dx - \pi \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} \left( \frac{3}{2} - x \right)^2 dx = \pi x^2 \Big|_0^{\frac{9}{2}} - \pi \left( \frac{9}{4}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}$$

$$= \pi \left[ \frac{81}{4} - 9 \right] = \frac{45}{4} \pi.$$

得分	评卷人

### 五、证明题 (6 分)

试证: 当  $x > 0$  时, 有  $\frac{1}{1+x} < \ln \frac{1+x}{x} < \frac{1}{x}$ .

证明: 构造函数  $f(x) = \ln x$ , 它在  $(0, +\infty)$  内连续,

当  $x > 0$  时, 函数在区间  $[x, 1+x]$  上连续, 且  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

故  $f(x)$  在  $[x, 1+x]$  上满足 Lagrange 中值定理, 存在  $\xi \in (x, x+1)$ ,

使得  $f(1+x) - f(x) = f'(\xi)$ , ( $x < \xi < x+1$ ).



而  $\frac{1}{1+x} < f'(\xi) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$ , 故有  $\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}$ ,

即  $x > 0$  时,  $\frac{1}{1+x} < \ln \frac{1+x}{x} < \frac{1}{x}$  成立.

**2006 年河南省普通高等学校  
选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试  
《高等数学》试卷**

题号	一	二	三	四	五	六	总分	核分人
分数								

得分	评卷人

**一、单项选择题 (每小题 2 分, 共计 60 分)**

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 并将其代码写

在题

干后面的括号内。不选、错选或多选者, 该题无分。

1. 已知函数  $f(2x-1)$  的定义域为  $[0,1]$ , 则  $f(x)$  的定义域为 ( )

A.  $[\frac{1}{2},1]$     B.  $[-1,1]$     C.  $[0,1]$     D.  $[-1,2]$

解:  $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2x-1 \leq 1 \Rightarrow B$ .

2. 函数  $y = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 是 ( )

A. 奇函数    B. 偶函数    C. 非奇非偶函数    D. 既奇又偶函数

解:  $f(x) + f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) + \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \ln 1 = 0 \Rightarrow A$ .

3. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x^2 - \sin x$  是  $x$  的 ( )

A. 高阶无穷小    B. 低阶无穷小    C. 同阶非等价无穷小    D. 等价无穷小

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x}{x} = -1 \Rightarrow C$ .

4. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3\sin n}{n} =$  ( )

A.  $\infty$     B. 2    C. 3    D. 5

解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3\sin n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [2 + 3\frac{\sin n}{n}] = 2 \Rightarrow B$ .

5. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2ax}-1}{x}, & x \neq 0 \\ a+1, & x = 0 \end{cases}$ , 在  $x=0$  处连续, 则 常数  $a =$  ( )

A. 0    B. 1    C. 2    D. 3

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2ax}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2ae^{2ax} = 2a = a+1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow B$ .

6. 设函数  $f(x)$  在点  $x=1$  处可导, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x)-f(1-x)}{x} =$  ( )

A.  $f'(1)$     B.  $2f'(1)$     C.  $3f'(1)$     D.  $-f'(1)$

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x)-f(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x)-f(1)+f(1)-f(1-x)}{x}$   
 $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x)-f(1)}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x)-f(1)}{-x} = 3f'(1) \Rightarrow C$

7. 若曲线  $y = x^2 + 1$  上点  $M$  处的切线与直线  $y = 4x + 1$  平行, 则点  $M$  的坐标 ( )

A. (2, 5)    B. (-2, 5)    C. (1, 2)    D. (-1, 2)

解:  $y' = 2x \Rightarrow 2x_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 2, y_0 = 5 \Rightarrow A$ .

8. 设  $\begin{cases} x = \int_0^t \sin u^2 du \\ y = \cos t^2 \end{cases}$ , 则  $\frac{dy}{dx} =$

( )

- A.  $t^2$       B.  $2t$       C.  $-t^2$       D.  $-2t$

解:  $\frac{dy}{dx} = \frac{-2t \sin t^2}{\sin t^2} = -2t \Rightarrow D.$

9. 设  $y^{(n-2)} = x \ln x (n > 2, \text{ 为正整数})$ , 则  $y^{(n)} =$  ( )

- A.  $(x+n) \ln x$       B.  $\frac{1}{x}$       C.  $(-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$       D. 0

解:  $y^{(n-2)} = x \ln x \Rightarrow y^{(n-1)} = 1 + \ln x \Rightarrow y^{(n)} = \frac{1}{x} \Rightarrow B.$

10. 曲线  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$  ( )

- B. 有一条水平渐近线, 一条垂直渐近线      B. 有一条水平渐近线, 两条垂直渐近线  
C. 有两条水平渐近线, 一条垂直渐近线,      D. 有两条水平渐近线, 两条垂直渐近线

解:  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1, \lim_{x \rightarrow -1} y = -4, \lim_{x \rightarrow -2} y = \infty \Rightarrow A.$

11. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理的条件是 ( )

- A.  $y = |x-1|, [0,2]$       B.  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}, [0,2]$

- C.  $y = x^2 - 3x + 2, [1,2]$       D.  $y = x \arcsin x, [0,1]$

解: 由罗尔中值定理条件: 连续、可导及端点的函数值相等  $\Rightarrow C.$

12. 函数  $y = e^{-x}$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内 ( )

- A. 单调递增且图像是凹的曲线      B. 单调递增且图像是凸的曲线  
C. 单调递减且图像是凹的曲线      D. 单调递减且图像是凸的曲线

解:  $y' = -e^{-x} < 0, y'' = e^{-x} > 0 \Rightarrow C.$

13. 若  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , 则  $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx =$  ( )

- A.  $e^{-x} + F(e^{-x}) + C$       B.  $F(e^{-x}) + C$   
C.  $e^{-x} - F(e^{-x}) + C$       D.  $-F(e^{-x}) + C$

解:  $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx = -\int f(e^{-x}) d(e^{-x}) = -F(e^{-x}) + C \Rightarrow D.$

14. 设  $f(x)$  为可导函数, 且  $f'(2x-1) = e^x$ , 则  $f(x) =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2} e^{2x-1} + C$       B.  $2e^{\frac{1}{2}(x+1)} + C$   
C.  $\frac{1}{2} e^{2x+1} + C$       D.  $2e^{\frac{1}{2}(x-1)} + C$

解:  $f'(2x-1) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{2}(x+1)} \Rightarrow f(x) = 2e^{\frac{1}{2}(x+1)} + C \Rightarrow B.$

15. 导数  $\frac{d}{dx} \int_a^b \arcsin t dt =$  ( )

- A.  $\arcsin x$       B. 0      C.  $\arcsin b - \arcsin a$       D.  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

解:  $\int_a^b \arcsin x dx$  是常数, 所以  $\frac{d}{dx} \int_a^b \arcsin x dx = 0 \Rightarrow B$ .

16. 下列广义积分收敛的是 ( )

A.  $\int_1^{+\infty} e^x dx$  B.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  C.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$  D.  $\int_1^{+\infty} \cos x dx$

解:  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{4} \arctan \frac{x}{2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4} (\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{2}) \Rightarrow C$ .

17. 设区域 D 由  $x=a, x=b (b>a), y=f(x), y=g(x)$  所围成, 则区域 D 的面积为 ( )

A.  $\int_a^b [f(x)-g(x)] dx$  B.  $\left| \int_a^b [f(x)-g(x)] dx \right|$   
C.  $\int_a^b [g(x)-f(x)] dx$  D.  $\int_a^b |f(x)-g(x)| dx$

解: 由定积分的几何意义可得 D 的面积为  $\int_a^b |f(x)-g(x)| dx \Rightarrow D$ .

18. 若直线  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{n} = \frac{z-2}{3}$  与平面  $3x-4y+3z+1=0$  平行, 则常数  $n=$  ( )

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

解:  $\{1, n, 3\} \perp \{3, -4, 3\} \Rightarrow 3-4n+9=0 \Rightarrow n=3 \Rightarrow B$ .

19. 设  $f(x, y) = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$ , 则偏导数  $f'_x(x, 1)$  为 ( )

A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

解:  $f(x, 1) = x \Rightarrow f'_x(x, 1) = 1 \Rightarrow B$ .

20. 设方程  $e^{2z} - xyz = 0$  确定了函数  $z = f(x, y)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  ( )

A.  $\frac{z}{x(2z-1)}$  B.  $\frac{z}{x(2z+1)}$  C.  $\frac{y}{x(2z-1)}$  D.  $\frac{y}{x(2z+1)}$

解: 令  $F(x, y, z) = e^{2z} - xyz \Rightarrow F'_x = -yz, F'_z = 2e^{2z} - xy$   
 $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{2e^{2z} - xy} = \frac{yz}{2xyz - xy} = \frac{z}{x(2z-1)} \Rightarrow A$ .

21. 设函数  $z = x^2 y + \frac{y}{x}$ , 则  $dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} =$  ( )

A.  $dx + 2dy$  B.  $dx - 2dy$  C.  $2dx + dy$  D.  $2dx - dy$

解:  $dz = 2xydx + x^2 dy + \frac{xdy - ydx}{x^2}$   
 $\Rightarrow dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 2dx + dy + dy - dx = dx + 2dy \Rightarrow A$ .

22. 函数  $z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 20$  在定义域上内 ( )

A. 有极大值, 无极小值 B. 无极大值, 有极小值  
C. 有极大值, 有极小值 D. 无极大值, 无极小值

解:  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 6x = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 6y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \Rightarrow \text{是极大值} \Rightarrow A.$$

23 设  $D$  为圆周由  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  围成的闭区域, 则  $\iint_D dx dy =$  ( )

- A.  $\pi$       B.  $2\pi$       C.  $4\pi$       D.  $16\pi$

解: 有二重积分的几何意义知:  $\iint_D dx dy =$  区域  $D$  的面积为  $\pi$ .

24. 交换二次积分  $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy$  ( $a > 0$ , 常数) 的积分次序后可化为 ( )

- A.  $\int_0^a dy \int_0^y f(x, y) dx$       B.  $\int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx$   
C.  $\int_0^a dy \int_0^a f(x, y) dx$       D.  $\int_0^a dy \int_a^y f(x, y) dx$

解: 积分区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x\} = \{(x, y) | 0 \leq y \leq a, y \leq x \leq a\}$   
 $\Rightarrow B$ .

25. 若二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ , 则积分区域  $D$  为 ( )

- A.  $x^2 + y^2 \leq 2x$       B.  $x^2 + y^2 \leq 2$   
C.  $x^2 + y^2 \leq 2y$       D.  $0 \leq x \leq \sqrt{2y - y^2}$

解: 在极坐标下积分区域可表示为:  $D = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\sin\theta\}$ , 在直角坐标系下边界方程为  $x^2 + y^2 = 2y$ , 积分区域为右半圆域  $\Rightarrow D$

26. 设  $L$  为直线  $x + y = 1$  上从点  $A(1, 0)$  到  $B(0, 1)$  的直线段, 则  $\int_L (x + y) dx - dy =$  ( )

- A. 2      B. 1      C. -1      D. -2

解:  $L: \begin{cases} x = x \\ y = 1 - x \end{cases}$ ,  $x$  从 1 变到 0,  $\int_L (x + y) dx - dy = \int_1^0 dx + dx = -2 \Rightarrow D$ .

27. 下列级数中, 绝对收敛的是 ( )

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$       B.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n}$   
C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n^2}$       D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$

解:  $\sin \frac{\pi}{n^2} < \frac{\pi}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}$  收敛  $\Rightarrow C$ .

28. 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ( $a_n$  为常数  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 在点  $x = -2$  处收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

( )

- A. 绝对收敛      B. 条件收敛      C. 发散      D. 敛散性不确定

得分

解:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = -2$  收敛, 则在  $x = -1$  绝对收敛, 即级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  绝对收敛  $\Rightarrow A$ .

29. 微分方程  $\sin x \cos y dy + \cos x \sin y dx = 0$  的通解为 ( )

- A.  $\sin x \cos y = C$       B.  $\cos x \sin y = C$   
C.  $\sin x \sin y = C$       D.  $\cos x \cos y = C$

解:  $\sin x \cos y dy + \cos x \sin y dx = 0 \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\frac{\cos x}{\sin x} dx$   
 $\Rightarrow \frac{d \sin y}{\sin y} = -\frac{d \sin x}{\sin x} \Rightarrow \ln \sin y + \ln \sin x = \ln C \Rightarrow \sin x \sin y = C \Rightarrow C$ .

30. 微分方程  $y'' + y' - 2y = xe^{-x}$  的特解用特定系数法可设为 ( )

- A.  $y^* = x(ax + b)e^{-x}$       B.  $y^* = x^2(ax + b)e^{-x}$   
C.  $y^* = (ax + b)e^{-x}$       D.  $y^* = axe^{-x}$

解:  $-1$  不是微分方程的特征根,  $x$  为一次多项式, 可设  $y^* = (ax + b)e^{-x} \Rightarrow C$ .

## 二、填空题 (每小题 2 分, 共 30 分)

31. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ , 则  $f(\sin x) =$  \_\_\_\_\_.

解:  $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow f(\sin x) = 1$ .

32.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{3}}{x^2 - 2x} =$  \_\_\_\_\_.

解:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{3}}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{x(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} =$   
 $= \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ .

33. 设函数  $y = \arctan 2x$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_.

解:  $dy = \frac{2}{1+4x^2} dx$ .

34. 设函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  在  $x = -1$  处取得极小值  $-2$ , 则常数  $a$  和  $b$  分别为 \_\_\_\_\_.

解:  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow 3 - 2a + b = 0, -2 = -1 + a - b \Rightarrow a = 4, b = 5$ .

35. 曲线  $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$  的拐点为 \_\_\_\_\_.

解:  $y' = 3x^2 - 6x + 2 \Rightarrow y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow (x, y) = (1, -1)$ .

36. 设函数  $f(x), g(x)$  均可微, 且同为某函数的原函数, 有  $f(1) = 3, g(1) = 1$  则  $f(x) - g(x) =$  \_\_\_\_\_.

解:  $f(x) - g(x) = C \Rightarrow C = f(1) - g(1) = 2 \Rightarrow f(x) - g(x) = 2$ .

37.  $\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + \sin^3 x) dx =$  \_\_\_\_\_.

解:  $\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + \sin^3 x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x dx = 2 \int_0^{\pi} x^2 dx + 0 = \frac{2\pi^3}{3}$ .

38. 设函数  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ , 则  $\int_0^2 f(x-1)dx =$  \_\_\_\_\_.

解:  $\int_0^2 f(x-1)dx \stackrel{x-1=t}{=} \int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^1 e^x dx = e - \frac{2}{3}$ .

39. 向量  $\vec{a} = \{1, 1, 2\}$  与向量  $\vec{b} = \{2, -1, 1\}$  的夹角为 \_\_\_\_\_.

解:  $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$ .

40. 曲线  $L: \begin{cases} y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为 \_\_\_\_\_.

解: 把  $y^2 = 2x$  中的  $y^2$  换成  $z^2 + y^2$ , 即得所求曲面方程  $z^2 + y^2 = 2x$ .

41. 设函数  $z = xy + x^2 \sin y$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$  \_\_\_\_\_.

解:  $\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2x \sin y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 + 2x \cos y$ .

42. 设区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ , 则  $\iint_D (y - x^2) dx dy =$  \_\_\_\_\_.

解:  $\iint_D (y - x^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-1}^1 (y - x^2) dy = -2 \int_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}$ .

43. 函数  $f(x) = e^{-x^2}$  在  $x_0 = 0$  处展开的幂级数是 \_\_\_\_\_.

解:  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty)$ .

44. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$  的和函数为 \_\_\_\_\_.

解:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{x}{2})^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\frac{x}{2})^n}{n} = \ln(1 + \frac{x}{2}),$   
 $(-2 < x \leq 2).$

45. 通解为  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$  ( $C_1, C_2$  为任意常数) 的二阶线性常系数齐次微分方程为 \_\_\_\_\_.

解:  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$   
 $\Rightarrow y'' - 2y' - 3y = 0$ .

得分	评卷人

### 三、计算题 (每小题 5 分, 共 40 分)

46. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{x \sin^3 2x}$ .

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{x \sin^3 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{8x^4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 2xe^{-x^2}}{32x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{16x^2}$   
 $\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{-x^2}}{32x} = -\frac{1}{16} \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2} = -\frac{1}{16}$ .

47. 求函数  $y = (x^2 + 3x)^{\sin 2x}$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

解: 取对数得:  $\ln y = \sin 2x \ln(x^2 + 3x)$ ,

两边对  $x$  求导得:  $\frac{1}{y} y' = 2 \cos 2x \ln(x^2 + 3x) + \frac{2x+3}{x^2+3x} \sin 2x$

所以  $y' = (x^2 + 3x)^{\sin 2x} [2 \cos 2x \ln(x^2 + 3x) + \frac{2x+3}{x^2+3x} \sin 2x]$   
 $= 2(x^2 + 3x)^{\sin 2x} \cos 2x \ln(x^2 + 3x) + (x^2 + 3x)^{\sin 2x-1} (2x+3) \sin 2x.$

48. 求不定积分  $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

解:  $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \stackrel{x=2\sin t}{=} \int \frac{4\sin^2 t}{2\cos t} 2\cos t dt = 4 \int \sin^2 t dt = 2 \int (1 - \cos 2t) dt$   
 $= 2t - \sin 2t + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} - 2 \sin t \cos t + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C.$

49. 计算定积分  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx.$

解:  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx = \int_0^1 \ln(1+x) d\frac{1}{2-x} = \frac{\ln(1+x)}{2-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(2-x)(1+x)} dx$   
 $= \ln 2 - \frac{1}{3} \int_0^1 \left( \frac{1}{2-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2-x}{1+x} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{2}{3} \ln 2 = \frac{1}{3} \ln 2.$

50. 设  $z = f(2x+y) + g(x, xy)$ , 其中  $f(t), g(u, v)$  皆可微, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

解:  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(2x+y) \frac{\partial(2x+y)}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$   
 $= 2f'(2x+y) + g'_u(x, xy) + yg'_v(x, xy)$   
 $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(2x+y) \frac{\partial(2x+y)}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f'(2x+y) + xg'_v(x, xy).$

51. 计算二重积分  $I = \iint_D x^2 y dx dy,$

其中  $D$  由  $y=x, y=2x$  及  $x=1$  所围成.

解: 积分区域如图 06-1 所示,

可表示为:  $0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x.$

所以  $I = \iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} x^2 y dy$   
 $= \int_0^1 x^2 dx \left( \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{2x} = \frac{3}{2} \int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{10} x^5 \Big|_0^1 = \frac{3}{10}.$

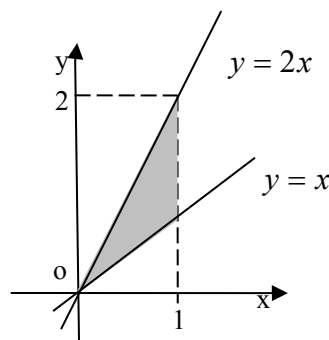


图 06-1

52. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+(-3)^n} (x-1)^n$  的收敛区间 (不考虑区间端点的情况).

解: 令  $x-1=t$ , 级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+(-3)^n} t^n$ , 这是不缺项的标准的幂级数.



$$\text{因为 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1+(-3)^n}{1+(-3)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(-3)^n} + 1}{\frac{1}{(-3)^{n+1}} - 3} \right| = \frac{1}{3},$$

故级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+(-3)^n} t^n$  的收敛半径  $R = \frac{1}{\rho} = 3$ , 即级数收敛区间为  $(-3, 3)$ .

对级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+(-3)^n} (x-1)^n$  有  $-3 < x-1 < 3$ , 即  $-2 < x < 4$ .

故所求级数的收敛区间为  $(-2, 4)$ .

53. 求微分方程  $x^2 dy + (2xy - x + 1) dx = 0$  通解.

解: 微分方程  $x^2 dy + (2xy - x + 1) dx = 0$  可化为  $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1-x}{x^2}$ , 这是一阶线性微分方程, 它对应的齐次线性微分方程  $y' + \frac{2}{x} y = 0$  通解为  $y = \frac{C}{x^2}$ .

设非齐次线性微分方程的通解为  $y = \frac{C(x)}{x^2}$ , 则  $y' = \frac{xC'(x) - 2C(x)}{x^3}$ , 代入方程得

$$C'(x) = 1 - x \Rightarrow C(x) = x - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{故所求方程的通解为 } y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}.$$

得分	评卷人

#### 四、应用题 (每小题 7 分, 共计 14 分)

54. 某公司的甲、乙两厂生产同一种产品, 月产量分别为  $x, y$  千件; 甲厂月生产成本是  $C_1 = x^2 - 2x + 5$  (千元), 乙厂月生产成本是  $C_2 = y^2 + 2y + 3$  (千元). 若要求该产品每月总产量为 8 千件, 并使总成本最小, 求甲、乙两厂最优产量和相应最小成本.

解: 由题意可知: 总成本  $C = C_1 + C_2 = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 8$ ,  
约束条件为  $x + y = 8$ .

问题转化为在  $x + y = 8$  条件下求总成本  $C$  的最小值.

把  $x + y = 8$  代入目标函数得  $C = 2x^2 - 20x + 88 (x > 0 \text{ 的整数})$ .

则  $C' = 4x - 20$ , 令  $C' = 0$  得唯一驻点为  $x = 5$ , 此时有  $C'' = 4 > 0$ .

故  $x = 5$  是唯一极值点且为极小值, 即最小值点. 此时有  $y = 3, C = 38$ .

所以 甲、乙两厂最优产量分别为 5 千件和 3 千件, 最低成本为 38 千元.

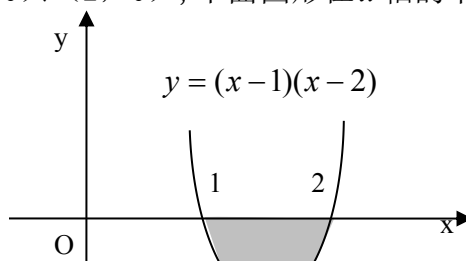
55. 由曲线  $y = (x-1)(x-2)$  和  $x$  轴所围成一平面图形, 求此平面图形绕  $y$  轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解: 平面图形如图 06-2 所示, 此立体可看作 X 型区域绕  $y$  轴旋转一周而得到.

利用体积公式  $V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx$ .

显然, 抛物线与  $x$  两交点分别为  $(1, 0)$ 、 $(2, 0)$ , 平面图形在  $x$  轴的下方.

$$\begin{aligned} \text{故 } V_y &= 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx \\ &= -2\pi \int_1^2 x(x-1)(x-2) dx \\ &= -2\pi \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \end{aligned}$$



$$= -2\pi \left( \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

得分	评卷人

### 五、证明题 (6 分)

56. 设  $f(x)$  在  $[-a, a]$  ( $a > 0$ , 为常数) 上连续, 证明:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

并计算  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + e^{-x}} dx$ .

证明: 因为  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx$ ,

而  $\int_{-a}^0 f(x) dx \stackrel{x=-t}{=} \int_a^0 f(-t) d(-t) = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$ ,

故  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx$

即有  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$ .

利用上述公式有

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + e^{-x}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{\cos x}{1 + e^{-x}} + \frac{\cos(-x)}{1 + e^x} \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \left[ \frac{e^x}{1 + e^x} + \frac{1}{1 + e^x} \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

**2007 年河南省普通高等学校  
选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试  
《高等数学》试卷**

题号    一        二        三        四        五        六        总分    核分人  
分数

**一. 单项选择题 (每题 2 分, 共计 50 分)**

在每小题的备选答案中选出一个正确答案, 并将其代码写在题干后面的括号内. 不选、错选或多选者, 该题无分.

1. 集合  $\{3,4,5\}$  的所有子集共有 (        )

A. 5                      B. 6                      C. 7                      D. 8

解: 子集个数  $2^n = 2^3 = 8 \Rightarrow D$ 。

2. 函数  $f(x) = \arcsin(x-1) + \sqrt{3-x}$  的定义域为 (        )

A.  $[0,3]$                 B.  $[0,2]$                 C.  $[2,3]$                 D.  $[1,3]$

解:  $\begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 1 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow B$ 。

3. 当  $x \rightarrow 0$  时, 与  $x$  不等价的无穷小量是 (        )

A.  $2x$                       B.  $\sin x$                       C.  $e^x - 1$                       D.  $\ln(1+x)$

解: 根据常用等价关系知, 只有  $2x$  与  $x$  比较不是等价的. 应选 A。

4. 当  $x = 0$  是函数  $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$  的 (        )

A. 连续点                B. 可去间断点                C. 跳跃间断点                D. 第二类间断点

解:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow C$ 。

5. 设  $f(x)$  在  $x=1$  处可导, 且  $f'(1)=1$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1+h)}{h}$  的值为 (        )

A. -1                      B. -2                      C. -3                      D. -4

解:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [-2f'(1-2h) - f'(1+h)] = -3f'(1) = -3 \Rightarrow C$ 。

6. 若函数  $f(x)$  在区间  $(a,b)$  内有  $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ , 则在区间  $(a,b)$  内,  $f(x)$  图形 (        )

A. 单调递减且为凸的                      B. 单调递增且为凸的  
C. 单调递减且为凹的                      D. 单调递增且为凹的

解:  $f'(x) > 0 \Rightarrow$  单调增加;  $f''(x) < 0 \Rightarrow$  凸的. 应选 B。

7. 曲线  $y = 1 + x^3$  的拐点是 (        )

A.  $(0,1)$                       B.  $(1,0)$                       C.  $(0,0)$                       D.  $(1,1)$

解:  $y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,1)$ , 应选 A。

8. 曲线  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{3x^2}$  的水平渐近线是 (        )

A.  $y = \frac{2}{3}$                       B.  $y = -\frac{2}{3}$                       C.  $y = \frac{1}{3}$                       D.  $y = -\frac{1}{3}$

解:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2}{3x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow C$ 。

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \tan t dt}{x^4} =$  ( )

- A. 0                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. 2                      D. 1

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \tan x dx}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \tan x^2}{4x^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow B$ 。

10. 若函数  $f(x)$  是  $g(x)$  的原函数, 则下列等式正确的是 ( )

- A.  $\int f(x) dx = g(x) + C$                       B.  $\int g(x) dx = f(x) + C$   
C.  $\int g'(x) dx = f(x) + C$                       D.  $\int f'(x) dx = g(x) + C$

解: 根据不定积分与原函数的关系知,  $\int g(x) dx = f(x) + C$ 。应选 B。

11.  $\int \cos(1-3x) dx =$  ( )

- A.  $-\frac{1}{3} \sin(1-3x) + C$                       B.  $\frac{1}{3} \sin(1-3x) + C$   
C.  $-\sin(1-3x) + C$                       D.  $3 \sin(1-3x) + C$

解:  $\int \cos(1-3x) dx = -\frac{1}{3} \int \cos(1-3x) d(1-3x) = -\frac{1}{3} \sin(1-3x) + C \Rightarrow A$ 。

12. 设  $y = \int_0^x (t-1)(t-3) dt$ , 则  $y'(0) =$  ( )

- A. -3                      B. -1                      C. 1                      D. 3

解:  $y' = (x-1)(x-3) \Rightarrow y'(0) = 3 \Rightarrow D$ 。

13. 下列广义积分收敛的是 ( )

- A.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$                       B.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$   
C.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$                       D.  $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

解: 由  $p$  积分和  $q$  积分的收敛性知,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$  收敛, 应选 C。

14. 对不定积分  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ , 下列计算结果错误的是 ( )

- A.  $\tan x - \cot x + C$                       B.  $\tan x - \frac{1}{\tan x} + C$   
C.  $\cot x - \tan x + C$                       D.  $-\cot 2x + C$

解: 分析结果, 就能知道选择 C。

15. 函数  $y = x^2$  在区间  $[1, 3]$  的平均值为 ( )

- A.  $\frac{26}{3}$                       B.  $\frac{13}{3}$                       C. 8                      D. 4

解:  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{6} \Big|_1^3 = \frac{13}{3} \Rightarrow B$ 。

16. 过  $Oz$  轴及点  $(3, -2, 4)$  的平面方程为 ( )

- A.  $3x + 2y = 0$                       B.  $2y + z = 0$

C.  $2x + 3y = 0$

D.  $2x + z = 0$

解: 经过  $Oz$  轴的平面可设为  $Ax + By = 0$ , 把点  $(3, -2, 4)$  代入得  $2x + 3y = 0$  应选 C。  
也可以把点  $(3, -2, 4)$  代入所给的方程验证, 且不含  $z$ 。

17. 双曲线  $\begin{cases} \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转所成的曲面方程为 ( )

A.  $\frac{x^2 + y^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1$

B.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2 + z^2}{4} = 1$

C.  $\frac{(x + y)^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1$

D.  $\frac{x^2}{3} - \frac{(y + z)^2}{4} = 1$

解: 把  $\frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1$  中  $x^2$  换成  $x^2 + y^2$  得  $\frac{x^2 + y^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1$ , 应选 A。

18.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{xy + 9}}{xy} =$  ( )

A.  $\frac{1}{6}$

B.  $-\frac{1}{6}$

C. 0

D. 极限不存在

解:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{xy + 9}}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{-xy}{xy(3 + \sqrt{xy + 9})} = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{3 + \sqrt{xy + 9}} = -\frac{1}{6} \Rightarrow B$ 。

19. 若  $z = x^y$ , 则  $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(e, 1)} =$  ( )

A.  $\frac{1}{e}$

B. 1

C.  $e$

D. 0

解:  $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(e, 1)} = x^y \ln x \Big|_{(e, 1)} = e \ln e = e \Rightarrow C$ 。

20. 方程  $z^2 y - xz^3 = 1$  所确定的隐函数为  $z = f(x, y)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  ( )

A.  $\frac{z^2}{2y - 3xz}$

B.  $\frac{z^2}{3xz - 2y}$

C.  $\frac{z}{2y - 3xz}$

D.  $\frac{z}{3xz - 2y}$

解: 令  $F = z^2 y - xz^3 - 1 \Rightarrow F'_x = -z^3; F'_z = 2zy - 3xz^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{z^2}{2y - 3xz}$ , 应

选 A。

21. 设  $C$  为抛物线  $y = x^2$  上从  $(0, 0)$  到  $(1, 1)$  的一段弧, 则  $\int_C 2xy dx + x^2 dy =$  ( )

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

解:  $C: \begin{cases} x = x \\ y = x^2, x \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1 \end{cases}, \int_C 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 4x^3 dx = 1 \Rightarrow C$ 。

22. 下列正项级数收敛的是 ( )

A.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$

B.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

C.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

D.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n \sqrt{n}}$

解: 对级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 、 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$  需要利用积分判别法, 超出大纲范围。级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  有结论: 当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散。级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ 、 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$  与级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  利用比较判别法的极限形式来确定——发散的, 应选 C。

23. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}}(x+1)^n$  的收敛区间为 ( )

- A.  $(-1, 1)$       B.  $(-3, 3)$       C.  $(-2, 4)$       D.  $(-4, 2)$

解: 令  $x+1=t$ , 级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} t^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^n \Rightarrow$  收敛区间为  $(-3, 3)$ , 即

$x+1 \in (-3, 3) \Rightarrow x \in (-4, 2) \Rightarrow D$ 。

24. 微分  $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \cos x$  特解形式应设为  $y^* =$  ( )

- A.  $Ce^x \cos x$       B.  $e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$   
C.  $xe^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$       D.  $x^2 e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

解:  $-1+i$  不是特征方程的特征根, 特解应设为  $e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ 。应选 B。

25. 设函数  $y = f(x)$  是微分方程  $y'' + y' = e^{2x}$  的解, 且  $f'(x_0) = 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处 ( )

- A. 取极小值      B. 取极大值      C. 不取极值      D. 取最大值

解: 有  $f''(x_0) + f'(x_0) = e^{2x_0} \Rightarrow f''(x_0) = e^{2x_0} > 0 \Rightarrow A$ 。

得分 评卷人

## 二、填空题 (每题 2 分, 共 30 分)

26. 设  $f(x) = 2x + 5$ , 则  $f[f(x) - 1] =$ \_\_\_\_\_。

解:  $f[f(x) - 1] = 2(f(x) - 1) + 5 = 2f(x) + 3 = 2(2x + 5) + 3 = 4x + 13$ 。

27.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} =$ \_\_\_\_\_。

解: 构造级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ , 利用比值判别法知它是收敛的, 根据收敛级数的必要条件

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ 。

28. 若函数  $f(x) = \begin{cases} 3e^{4x}, & x < 0 \\ 2x + \frac{a}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a =$ \_\_\_\_\_。

解:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{a}{2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 \Rightarrow a = 6$ 。

29. 已知曲线  $y = x^2 + x - 2$  上点  $M$  处的切线平行于直线  $y = 5x - 1$ , 则点  $M$  的坐标为 \_\_\_\_\_。

解:  $y' = 2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow M(2, 4)$ 。

30. 设  $f(x) = e^{2x-1}$ , 则  $f^{(2007)}(0) =$ \_\_\_\_\_。

解:  $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x-1} \Rightarrow f^{(2007)}(0) = 2^{2007} e^{-1}$ 。

31. 设  $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t^2 - t + 1 \end{cases}$ , 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} =$  \_\_\_\_\_

解:  $\frac{dy}{dx} = \frac{4t-1}{3} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1$ 。

32. 若函数  $f(x) = ax^2 + bx$  在  $x=1$  处取得极值 2, 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_

解:  $f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$ ;  $a + b = 2 \Rightarrow a = -2; b = 4$ 。

33.  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$  \_\_\_\_\_

解:  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C$ 。

34.  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx =$  \_\_\_\_\_

解:  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} S_{\text{圆}} = \frac{\pi}{4}$ 。

35. 向量  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$  的模  $|\vec{a}| =$  \_\_\_\_\_

解:  $|3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$ 。

36. 已知平面  $\pi_1: x + 2y - 5z + 7 = 0$  与平面  $\pi_2: 4x + 3y + mz + 13 = 0$  垂直, 则  $m =$  \_\_\_\_\_

解:  $\vec{n}_1 = \{1, 2, -5\}; \vec{n}_2 = \{4, 3, m\} \Rightarrow 4 + 6 - 5m = 0 \Rightarrow m = 2$ 。

37. 设  $f(x+y, xy) = x^2 + y^2$ , 则  $f(x, y) =$  \_\_\_\_\_

解:  $f(x+y, xy) = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \Rightarrow f(x, y) = x^2 - 2y$ 。

38. 已知  $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ , 交换积分次序后, 则  $I =$  \_\_\_\_\_

解:  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\}$   
 $= \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq y \leq x \right\} + \left\{ (x, y) \mid \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$ , 所

以次序交换后为  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ 。

39. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$  的和为 \_\_\_\_\_

解:  $S_n = \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) + \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$ ,

所以  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{u_1}$ 。

40. 微分方程  $y'' - 2y' + y = 0$  的通解为 \_\_\_\_\_

解: 有二重特征根 1, 故通解为  $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$  ( $C_1, C_2$  为任意常数)。

得分 评卷人

### 三、判断题 (每小题 2 分, 共 10 分)

你认为正确的在题后括号内划“√”, 反之划“×”。

41. 若数列  $\{x_n\}$  单调, 则  $\{x_n\}$  必收敛。

( )

解: 如数列  $\{n\}$  单调, 但发散, 应为  $\times$ 。

42. 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) \neq f(b)$ , 则一定不存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ 。( )

解: 如  $y = x^2$  在  $[-1, 3]$  满足上述条件, 但存在  $\xi = 0 \in [-1, 3]$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ , 应为  $\times$ 。

43.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \stackrel{\text{由洛比达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$ 。( )

解: 第二步不满足  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$ , 是错误的, 事实上  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$ 。

应为  $\times$ 。

44.  $0 \leq \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 2$ 。( )

解: 因  $0 < \sqrt{1 - e^{-2x}} < 1$ , 由定积分保序性知:  $0 \leq \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx \leq \ln 2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 2$ , 应为  $\checkmark$ 。

45. 函数  $f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  处可微是  $f(x, y)$  在  $P(x, y)$  处连续的充分条件。( )

解:  $f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  处可微可得  $f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  处连续, 反之不成立, 应为  $\checkmark$ 。

得分 评卷人

#### 四、计算题 (每小题 5 分, 共 40 分)

46. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ 。

解:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x} \stackrel{\sin x \sim x}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x}$

$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = e^0 = 1$ 。

47. 求函数  $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ 。

解: 两边取自然对数得  $\ln |y| = 2 \ln |x| + \frac{1}{3} [\ln |1-x| - \ln |1+x|]$ , ----- (1 分)

两边对  $x$  求导得:  $\frac{1}{y} y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{3} \left[ \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right]$ , ----- (3 分)

即  $y' = y \left[ \frac{2}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)} \right]$ , ----- (4 分)

故  $\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \left[ \frac{2}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)} \right]$ 。----- (5 分)

48. 求不定积分  $\int [e^{2x} + \ln(1+x)] dx$ 。



$$\begin{aligned}
 \text{解: } \int [e^{2x} + \ln(1+x)] dx &= \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) + \int \ln(1+x) dx \quad \text{---- (1 分)} \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} + x \ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x} dx \quad \text{----- (3 分)} \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} + x \ln(1+x) - \int \left[ 1 - \frac{1}{1+x} \right] dx \quad \text{---- (4 分)} \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} + x \ln(1+x) - x + \ln(1+x) + C. \quad \text{---- (5 分)}
 \end{aligned}$$

49. 计算定积分  $\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos 2x} dx$  .

解: 因  $2+2\cos 2x = 2(1+\cos 2x) = 4\cos^2 x$ , 所以

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \sqrt{2+2\cos 2x} dx &= \int_0^\pi \sqrt{4\cos^2 x} dx = \int_0^\pi 2|\cos x| dx \quad \text{----- (2 分)} \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx \quad \text{----- (4 分)} \\
 &= 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 2 + 2 = 4. \quad \text{----- (5 分)}
 \end{aligned}$$

50. 设  $z = f(e^x \sin y, 3x^2 y)$ , 且  $f(u, v)$  为可微函数, 求  $dz$ .

解: 令  $e^x \sin y = u$ ,  $3x^2 y = v$ , 有  $z = f(u, v)$ , 利用微分的不变性得

$$\begin{aligned}
 dz &= f'_u(u, v) du + f'_v(u, v) dv = f'_u d(e^x \sin y) + f'_v d(3x^2 y) \quad \text{---- (3 分)} \\
 &= f'_u (e^x \sin y dx + e^x \cos y dy) + f'_v (6xy dx + 3x^2 dy) \quad \text{----- (4 分)} \\
 &= (e^x \sin y f'_u + 6xy f'_v) dx + (e^x \cos y f'_u + 3x^2 f'_v) dy \quad \text{---- (5 分)}
 \end{aligned}$$

51. 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中  $D$  为圆环区域:  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ .

解: 积分区域  $D$  如图 07-1 所示:  $D$  的边界  $x^2 + y^2 = 1$ 、 $x^2 + y^2 = 4$  用极坐标表示分别为  $r = 1$ ,  $r = 2$ ; 故积分区域  $D$  在极坐标系下为

$$\{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq 2\}, \quad \text{---- (2 分)}$$

$$\text{故 } \iint_D x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr \quad \text{---- (3 分)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_1^2 r^3 dr = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_1^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{15}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{15}{8} \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 \theta d\theta \quad \text{---- (4 分)}$$

$$= \frac{15}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{15}{8} \left( \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{15\pi}{4}. \quad \text{---- (5 分)}$$

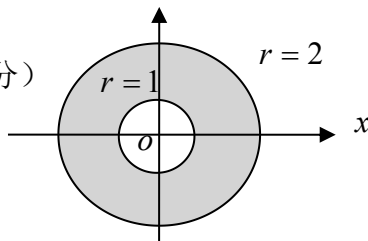


图 07-1

52. 将  $\frac{2x}{4-x^2}$  展开为  $x$  的幂级数, 并写出收敛区间.

$$\text{解: 因 } \frac{2x}{4-x^2} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} - \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}; \quad \text{---- (2 分)}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in (-1, 1).$$

$$\text{所以 } \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad x \in (-2, 2); \quad \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n \quad x \in (-2, 2). \quad \text{--- (3 分)}$$

$$\text{故 } \frac{2x}{4-x^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}}\right) x^n \quad x \in (-2, 2) \quad \text{--- (4 分)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} x^{2n+1} \quad x \in (-2, 2). \quad \text{--- (5 分)}$$

53. 求微分方程  $x^2 dy + (y - 2xy - x^2) dx = 0$  的通解.

解: 方程可化为  $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$ , 这是一阶线性非齐次微分方程, --- (1 分)

它对应的齐次方程  $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 0$  的通解为  $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}}$ , --- (2 分)

设原方程有通解  $y = C(x)x^2 e^{\frac{1}{x}}$ , 代入方程得  $C'(x)x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1$ ,

即  $C'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ , --- (3 分)

所以  $C(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = e^{-\frac{1}{x}} + C$ , --- (4 分)

故所求方程的通解为  $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$ . --- (5 分)

得分 评卷人

### 五、应用题 (每题 7 分, 共计 14 分)

54. 某工厂欲建造一个无盖的长方体污水处理池, 设计该池容积为  $V$  立方米, 底面造价每平方米  $a$  元, 侧面造价每平方米  $b$  元, 问长、宽、高各为多少米时, 才能使污水处理池的造价最低?

解: 设长方体的长、宽分别为  $x, y$ , 则高为  $\frac{V}{xy}$ , 又设造价为  $z$ , --- (1 分)

由题意可得

$$z = axy + 2b(x+y) \frac{V}{xy} = axy + \frac{2bV}{y} + \frac{2bV}{x} \quad (x > 0, y > 0); \quad \text{--- (3 分)}$$

而  $\frac{\partial z}{\partial x} = ay - \frac{2bV}{x^2}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = ax - \frac{2bV}{y^2}$ ; 在定义域内都有意义.

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = ay - \frac{2bV}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = ax - \frac{2bV}{y^2} = 0 \end{cases} \quad \text{得唯一驻点 } x = y = \sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}, \quad \text{----- (5 分)}$$

由题可知造价一定在内部存在最小值, 故  $x = y = \sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}$  就是使造价最小的取值, 此时高为  $\sqrt[3]{\frac{aV^2}{2b}}$ .

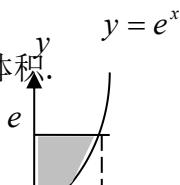
所以, 排污无盖的长方体的长、宽、高分别为  $\sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}$ 、 $\sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}$ 、 $\sqrt[3]{\frac{aV^2}{2b}}$  时, 工程造价最低. --- (7 分)

55. 设平面图形  $D$  由曲线  $y = e^x$ , 直线  $y = e$  及  $y$  轴所围成. 求:

(1) 平面图形  $D$  的面积;

(2) 平面图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解: 平面图形  $D$  如图 07-2 所示: --- (1 分)



取  $x$  为积分变量, 且  $x \in [0,1]$

(1) 平面图形  $D$  的面积为

$$S = \int_0^1 (e - e^x) dx \text{----- (3 分)}$$

$$= (ex - e^x) \Big|_0^1 = 1. \text{----- (4 分)}$$

(2) 平面图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所生成  
旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^1 x[e - e^x] dx = 2\pi e \int_0^1 x dx - 2\pi \int_0^1 x e^x dx \\ &= 2\pi e \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - 2\pi \int_0^1 x de^x = \pi e - 2\pi x e^x \Big|_0^1 + 2\pi \int_0^1 e^x dx \\ &= \pi e - 2\pi e + 2\pi e^x \Big|_0^1 = \pi(e - 2). \text{----- (7 分)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或 } V_y &= \pi \int_1^e (\ln y)^2 dy = \pi (\ln y)^2 y \Big|_1^e - \pi \int_1^e 2 \ln y dy \\ &= \pi e - 2\pi \int_1^e \ln y dy = \pi e - 2\pi y \ln y \Big|_1^e + 2\pi \int_1^e dy \\ &= \pi e - 2\pi e + 2\pi(e - 1) = \pi(e - 2). \end{aligned}$$

得 评卷人  
分

## 六、证明题 (6 分)

56. 若  $f'(x)$  在  $[a,b]$  上连续, 则存在两个常数  $m$  与  $M$ , 对于  
满足  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  的任意两点  $x_1, x_2$ , 证明恒有

$$m(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1).$$

证明: 因  $f'(x)$  在  $[x_1, x_2]$  有意义, 从而  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上连续且可导, 即  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上满足拉格朗日中值定理的条件, ----- (2 分)

故存在  $\xi \in (x_1, x_2)$ , 使得  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$ , ----- (3 分)

又因  $f'(x)$  在  $[a,b]$  上连续, 根据连续函数在闭区间上最值定理知,  $f'(x)$  在  $[a,b]$  上既有最大值又有最小值, 不妨设  $m, M$  分别是最小值和最大值, 从而  $x \in (a,b)$  时, 有  $m \leq f'(x) \leq M$ . ----- (5 分)

$$\text{即 } m \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq M,$$

故  $m(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1)$ . ---- (6 分)

**2008 年河南省普通高等学校  
选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试  
高等数学 试卷**

题号	一	二	三	四	五	总分	核分人
分数							

得分	评卷人

**一. 单项选择题** (每题 2 分, 共计 60 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 并将其代码写在题干后面的括号内. 不选、错选或多选者, 该题不得分.

1. 函数  $f(x) = \ln(1-x) + \sqrt{x+2}$  的定义域为 ( )

- A.  $[-2, -1]$       B.  $[-2, 1]$       C.  $[-2, 1)$       D.  $(-2, 1)$

解:  $\begin{cases} 1-x > 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x < 1 \Rightarrow C.$

2.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} =$  ( )

- A. 1      B. 0      C.  $\sqrt{2}$       D.  $\sqrt{3}$

解:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow D.$

3. 点  $x=0$  是函数  $y = \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{3^x} + 1}$  的 ( )
- A. 连续点      B. 跳跃间断点      C. 可去间断点      D. 第二类间断点

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{3^x} + 1} = \frac{-1}{1} = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{3^x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} \ln 3}{\frac{1}{3^x} \ln 3} = 1 \Rightarrow B.$$

4. 下列极限存在的为 ( )

A.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$       B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$       C.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$       D.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x - 3}$

$$\text{解: 显然只有 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2, \text{ 其他三个都不存在, 应选 B.}$$

5. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x^2)$  是比  $1-\cos x$  的 ( )
- A. 低阶无穷小      B. 高阶无穷小      C. 等阶无穷小      D. 同阶但不等价无穷小

$$\text{解: } \ln(1+x^2) \sim x^2, 1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{2} \Rightarrow D.$$

6. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 1 + (x+1)\sin \frac{1}{x+1}, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ \arctan x, & x > 0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  ( )

- A. 在  $x=-1$  处连续, 在  $x=0$  处不连续      B. 在  $x=0$  处连续, 在  $x=-1$  处不连续  
C. 在  $x=-1, 0$ , 处均连续      D. 在  $x=-1, 0$ , 处均不连续

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1, f(-1) = 1 \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x=-1 \text{ 处连续;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, f(0) = 1 \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处不连续; 应选 A.}$$

7. 过曲线  $y = \arctan x + e^x$  上的点  $(0, 1)$  处的法线方程为 ( )

A.  $2x - y + 1 = 0$       B.  $x - 2y + 2 = 0$   
C.  $2x - y - 1 = 0$       D.  $x + 2y - 2 = 0$

$$\text{解: } y' = \frac{1}{1+x^2} + e^x \Rightarrow f'(0) = 2 \Rightarrow k_{\text{法}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow D.$$

8. 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处可导,  $f(x) = f(0) - 3x + \alpha(x)$  且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = 0$ , 则  $f'(0) =$  ( )

A. -1      B. 1      C. -3      D. 3

$$\text{解: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x + \alpha(x)}{x} = -3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = -3, \text{ 应选 C.}$$

9. 若函数  $f(x) = (\ln x)^x (x > 1)$ , 则  $f'(x) =$  ( )

A.  $(\ln x)^{x-1}$       B.  $(\ln x)^{x-1} + (\ln x)^x \ln(\ln x)$   
C.  $(\ln x)^x \ln(\ln x)$       D.  $x(\ln x)^x$

$$\text{解: } f(x) = (\ln x)^x = e^{x \ln(\ln x)} \Rightarrow y' = (\ln x)^x [x \ln(\ln x)]' = (\ln x)^{x-1} + (\ln x)^x \ln(\ln x), \text{ 应选 B.}$$

10. 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$  确定, 则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} =$  ( )

A. -2      B. -1      C.  $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$       D.  $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

解:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin t}{\cos t} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 t} \times \frac{1}{3 \cos^2 t \sin t} \Rightarrow \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3} \sqrt{2}$ , 应选 D.

11. 下列函数中, 在区间  $[-1, 1]$  上满足罗尔中值定理条件的是 ( )

- A.  $y = e^x$       B.  $y = \ln |x|$       C.  $y = 1 - x^2$       D.  $y = \frac{1}{x^2}$

解: 验证罗尔中值定理的条件, 只有  $y = 1 - x^2$  满足, 应选 C.

12. 曲线  $y = x^3 + 5x - 2$  的拐点是 ( )

- A.  $x = 0$       B.  $(0, -2)$       C. 无拐点      D.  $x = 0, y = -2$

解:  $y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, -2)$ , 应选 B.

13. 曲线  $y = \frac{1}{|x-1|}$  ( )

- A. 只有水平渐近线      B. 既有水平渐近线又有垂直渐近线  
C. 只有垂直渐近线      D. 既无水平渐近线又无垂直渐近线

解:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x-1|} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = \infty \Rightarrow B$ .

14. 如果  $f(x)$  的一个原函数是  $x \ln x$ , 那么  $\int x^2 f''(x) dx =$  ( )

- A.  $\ln x + C$       B.  $x^2 + C$   
C.  $x^3 \ln x + C$       D.  $C - x$

解:  $f(x) = (x \ln x)' = 1 + \ln x \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \int x^2 f''(x) dx = -\int dx = -x + C$ , 应选

D.

15.  $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$       B.  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x-3} \right| + C$   
C.  $\ln(x-3) - \ln(x-1) + C$       D.  $\ln(x-1) - \ln(x-3) + C$

解:  $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = \int \frac{dx}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right] dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$ , 应选 A.

16. 设  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$ , 则  $I$  的取值范围为 ( )

- A.  $0 \leq I \leq 1$       B.  $\frac{1}{2} \leq I \leq 1$       C.  $0 \leq I \leq \frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{1}{2} < I < 1$

解: 此题有问题, 定积分是一个常数, 有  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^4} \leq 1$ , 根据定积分的估值性质, 有

$\frac{1}{2} \leq I \leq 1$ , 但这个常数也在其它三个区间, 都应该正确, 但真题中答案是 B.

17. 下列广义积分收敛的是 ( )

- A.  $\int_1^{+\infty} x^3 dx$       B.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$       C.  $\int_1^{+\infty} \sqrt{x} dx$       D.  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

解: 显然应选 D.

18.  $\int_{-3}^3 |1-x| dx =$  ( )

- A.  $2 \int_0^3 |1-x| dx$       B.  $\int_{-3}^1 (x-1) dx + \int_1^3 (1-x) dx$   
C.  $\int_{-3}^1 (1-x) dx - \int_1^3 (x-1) dx$       D.  $\int_{-3}^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$

解:  $\int_{-3}^3 |1-x| dx = \int_{-3}^1 |1-x| dx + \int_1^3 |1-x| dx = \int_{-3}^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$ , 应选 D.

19. 若  $f(x)$  可导函数,  $f(x) > 0$ , 且满足  $f^2(x) = \ln^2 2 - 2 \int_0^x \frac{f(t) \sin t}{1 + \cos t} dt$ , 则  $f(x) =$  ( )

A.  $\ln(1 + \cos x)$

B.  $-\ln(1 + \cos x) + C$

C.  $-\ln(1 + \cos x)$

D.  $\ln(1 + \cos x) + C$

解: 对  $f^2(x) = \ln^2 2 - 2 \int_0^x \frac{f(t) \sin t}{1 + \cos t} dt$  两边求导有:  $2f(x)f'(x) = -2 \frac{f(x) \sin x}{1 + \cos x}$ ,

即有  $f'(x) = -\frac{\sin x}{1 + \cos x} \Rightarrow f(x) = -\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{d(1 + \cos x)}{1 + \cos x}$   
 $= \ln(1 + \cos x) + C$ , 还初始条件  $f(0) = \ln 2$ , 代入得  $C = 0$ , 应选 A.

20. 若函数  $f(x)$  满足  $f(x) = x + 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx$ , 则  $f(x) =$  ( )

A.  $x - \frac{1}{3}$

B.  $x - \frac{1}{2}$

C.  $x + \frac{1}{2}$

D.  $x + \frac{1}{3}$

解: 令  $a = \int_{-1}^1 f(x) dx$ , 则  $f(x) = x + 1 - \frac{1}{2} a$ ,

故有  $a = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x + 1 - \frac{1}{2} a) dx = 2 - a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}$ , 应选 C.

21. 若  $I = \int_0^e x^3 f(x^2) dx$  则  $I =$  ( )

A.  $\int_0^{e^2} xf(x) dx$

B.  $\int_0^e xf(x) dx$

C.  $\frac{1}{2} \int_0^{e^2} xf(x) dx$

D.  $\frac{1}{2} \int_0^e xf(x) dx$

解:  $I = \frac{1}{2} \int_0^e x^2 f(x^2) d(x^2) \stackrel{x^2=t}{=} \frac{1}{2} \int_0^{e^2} tf(t) d(t) = \frac{1}{2} \int_0^{e^2} xf(x) d(x)$ , 应选 C.

22. 直线  $\frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{9} = \frac{z}{1}$  与平面  $4x - 3y + 7z = 5$  的位置关系为

A. 直线与平面斜交

B. 直线与平面垂直

C. 直线在平面内

D. 直线与平面平行

解:  $\vec{s} = \{5, 9, 1\}, \vec{n} = \{4, -3, 7\} \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{n}$ , 而点  $(-2, -4, 0)$  不在平面内, 为平行, 应选 D.

23.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} =$  ( )

A. 2

B. 3

C. 1

D. 不存在

解:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{x^2 + y^2}$   
 $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1) = 2$ , 应选 A.

24. 曲面  $z = x^2 + y^2$  在点  $(1, 2, 5)$  处切平面方程 ( )

A.  $2x + 4y - z = 5$

B.  $4x + 2y - z = 5$

C.  $x + 2y - 4z = 5$

D.  $2x - 4y + z = 5$

解: 令  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ ,  $F'_x(1, 2, 5) = 2, F'_y(1, 2, 5) = 4, F'_z(1, 2, 5) = -1 \Rightarrow$

$2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0 \Rightarrow 2x + 4y - z = 5$ , 也可以把点  $(1, 2, 5)$  代入方程验证, 应选 A.

25. 设函数  $z = x^3y - xy^3$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$  ( )

- A.  $6xy$       B.  $3x^2 - 3y^2$       C.  $-6xy$       D.  $3y^2 - 3x^2$

解:  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 - 3y^2$ , 应选 B.

26. 如果区域  $D$  被分成两个子区域  $D_1$  和  $D_2$  且  $\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = 5$ ,

$\iint_{D_2} f(x, y) dx dy = 1$ , 则  $\iint_D f(x, y) dx dy =$  ( )

- A. 5      B. 4      C. 6      D. 1

解: 根据二重积分的可加性,  $\iint_D f(x, y) dx dy = 6$ , 应选 C.

27. 如果  $L$  是摆线  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$  从点  $A(2\pi, 0)$  到点  $B(0, 0)$  的一段弧, 则

$\int_L (x^2 y + 3xe^x) dx + (\frac{1}{3}x^3 - y \sin y) dy =$  ( )

- A.  $e^{2\pi}(1 - 2\pi) - 1$       B.  $2[e^{2\pi}(1 - 2\pi) - 1]$   
C.  $3[e^{2\pi}(1 - 2\pi) - 1]$       D.  $4[e^{2\pi}(1 - 2\pi) - 1]$

解: 有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = x^2 \Rightarrow$  此积分与路径无关, 取直线段  $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}$ ,  $x$  从  $2\pi$  变到 0, 则

$\int_L (x^2 y + 3xe^x) dx + (\frac{1}{3}x^3 - y \sin y) dy = \int_{2\pi}^0 3xe^x dx = 3 \int_{2\pi}^0 x de^x = 3(xe^x - e^x) \Big|_{2\pi}^0$   
 $= 3[e^{2\pi}(1 - 2\pi) - 1]$ , 应选 C.

28. 以通解为  $y = Ce^x$  ( $C$  为任意常数) 的微分方程为 ( )

- A.  $y' + y = 0$       B.  $y' - y = 0$   
C.  $y'y = 1$       D.  $y - y' + 1 = 0$

解:  $y = Ce^x \Rightarrow y' = Ce^x \Rightarrow y' - y = 0$ , 应选 B.

29. 微分方程  $y'' + y' = xe^{-x}$  的特解形式应设为  $y^* =$  ( )

- A.  $x(ax + b)e^{-x}$       B.  $ax + b$       C.  $(ax + b)e^{-x}$       D.  $x^2(ax + b)e^{-x}$

解:  $-1$  是单特征方程的根,  $x$  是一次多项式, 应设  $y^* = x(ax + b)e^{-x}$ , 应选 A.

30. 下列四个级数中, 发散的级数是 ( )

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$       B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{1000n}$       C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$       D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

解: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{1000n}$  的一般项  $\frac{2n-3}{1000n}$  的极限为  $\frac{1}{500} \neq 0$ , 是发散的, 应选 B.

## 二、填空题 (每题 2 分, 共 30 分)

31.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的\_\_\_\_\_条件是  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ .

解: 显然为充要 (充分且必要).

32. 函数  $y = x - \sin x$  在区间  $(0, 2\pi)$  单调\_\_\_\_\_, 其曲线在区间  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  内的凹凸性为\_\_\_\_\_的.



解:  $y' = 1 - \cos x > 0 \Rightarrow$  在  $(0, 2\pi)$  内单调增加,  $y'' = \sin x$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  内大于零, 应为凹的.

33. 设方程  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = a$  ( $a$  为常数) 所确定的隐函数  $z = f(x, y)$ , 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解:  $F = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - a \Rightarrow F'_z = 2z, F'_x = 6x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x}{z}.$

34.  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解:  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2t - 2 \ln(1+t) + C$   
 $= 2\sqrt{x} - 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C.$

35.  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{1 + \cos x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 函数  $\frac{x}{1 + \cos x}$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$  是奇函数, 所以  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{1 + \cos x} dx = 0.$

36. 在空间直角坐标系中, 以  $A(0, -4, 1)$ ,  $B(-1, -3, 1)$ ,  $C(2, -4, 0)$  为顶点的  $\triangle ABC$  的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

解:  $\overrightarrow{AB} = \{-1, 1, 0\}, \overrightarrow{AC} = \{2, 0, -1\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{-1, -1, -2\},$  所以

$$\triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

37. 方程  $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = -2 \end{cases}$  在空间直角坐标下的图形为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

解: 是椭圆柱面与平面  $x = -2$  的交线, 为两条平行直线.

38. 函数  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  的驻点为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

解:  $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0), (1, 1).$

39. 若  $z = x^2 y + e^{1-x} \sqrt{xy^3 + 2} \tan \sqrt{\frac{y}{x}}$ , 则  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解:  $f(x, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 0.$

40.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_x^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y}{y} dy = \underline{\hspace{2cm}}$

解:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_x^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{y} \cos y dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^y \frac{1}{y} \cos y dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos y dy = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

41. 直角坐标系下的二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  (其中  $D$  为环域  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ ) 化为极坐标形式为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

解:  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

42. 以  $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$  为通解的二阶常系数线性齐次微分方程为\_\_\_\_\_.

解: 由  $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$  为通解知, 有二重特征根-3, 从而  $p = 6, q = 9$ , 微分方程为  $y'' + 6y' + 9y = 0$ .

43. 等比级数  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0)$ , 当\_\_\_\_\_时级数收敛, 当\_\_\_\_\_时级数发散.

解: 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$  是等比级数, 当  $|q| < 1$  时, 级数收敛, 当  $|q| \geq 1$  时, 级数发散.

44. 函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$  展开为  $x$  的幂级数为\_\_\_\_\_.

解: 
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2} = -\frac{1}{3} \left[ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right] = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{1+x} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$
$$= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}} \right] x^n, (-1 < x < 1).$$

45.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-2}{n} \right)^n$  的敛散性为\_\_\_\_\_的级数.

解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-2}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2} \times (-2)} = e^{-2} \neq 0$ , 级数发散.

### 三、计算题 (每小题 5 分, 共 40 分)

46. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3} \right)^{\frac{x^2 + 5}{2}}$ .

解: 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3} \right)^{\frac{x^2 + 5}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\frac{x^2 + 5}{2}}}{\left( 1 - \frac{3}{x^2} \right)^{\frac{x^2 + 5}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{2}} \times \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\frac{5}{2}}}{\left( 1 - \frac{3}{x^2} \right)^{-\frac{x^2}{3} \times (-\frac{3}{2})} \times \left( 1 - \frac{3}{x^2} \right)^{\frac{5}{2}}}$$
$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{2}} \times \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\frac{5}{2}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{x^2} \right)^{-\frac{x^2}{3} \times (-\frac{3}{2})} \times \left( 1 - \frac{3}{x^2} \right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{e}{e^{\frac{3}{2}}} = e^{\frac{5}{2}}.$$

47. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\int_0^{x^2} t^3 \sqrt{1+t^2} dt}$ .

解: 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\int_0^{x^2} t^3 \sqrt{1+t^2} dt} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{x^2 \sqrt{1+x^4} \times 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^4}} = 2.$$

48. 已知  $y = \ln \sin(1-2x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sin(1-2x)} [\sin(1-2x)]' = \frac{\cos(1-2x)}{\sin(1-2x)} [1-2x]' = -2 \frac{\cos(1-2x)}{\sin(1-2x)} \\ &= -2 \cot(1-2x).\end{aligned}$$

49. 计算不定积分  $\int x \arctan x dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \int x \arctan x dx &= \int \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C.\end{aligned}$$

50. 求函数  $z = e^x \cos(x+y)$  的全微分.

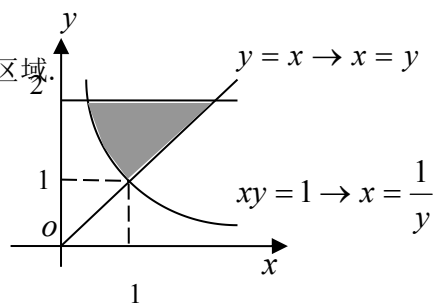
解: 利用微分的不变性,

$$\begin{aligned}dz &= d[e^x \cos(x+y)] = e^x d \cos(x+y) + \cos(x+y) de^x \\ &= -e^x \sin(x+y) d(x+y) + \cos(x+y) e^x dx \\ &= -e^x \sin(x+y) [dx + dy] + \cos(x+y) e^x dx \\ &= e^x [\cos(x+y) - \sin(x+y)] dx - e^x \sin(x+y) dy.\end{aligned}$$

51. 计算  $\iint_D \frac{x}{y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  是由  $y=2, y=x, xy=1$  所围成的闭区域.

解: 积分区域  $D$  如图所示: 把区域看作 Y 型, 则有

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, \frac{1}{y} \leq x \leq y \right\},$$



$$\begin{aligned}\text{故 } \iint_D \frac{x}{y^2} dx dy &= \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y \frac{x}{y^2} dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy \int_{\frac{1}{y}}^y x dx = \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy \times \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{y}}^y \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[ 1 - \frac{1}{y^4} \right] dy = \frac{1}{2} \left( y + \frac{1}{3y^3} \right) \Big|_1^2 = \frac{17}{48}.\end{aligned}$$

52. 求微分方程  $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$  满足初始条件  $y(0) = -1$  的特解.

解: 这是一阶线性非齐次微分方程, 它对应的齐次微分方程  $y' + y \cos x = 0$  的通解为

$$y = Ce^{-\sin x}, \text{ 设 } y = C(x)e^{-\sin x} \text{ 是原方程解, 代入方程有 } C'(x)e^{-\sin x} = e^{-\sin x},$$

即有  $C'(x) = 1$ , 所以  $C(x) = x + C$ , 故原方程的通解为  $y = Ce^{-\sin x} + xe^{-\sin x}$ ,

把初始条件  $y(0) = -1$  代入得:  $C = -1$ , 故所求的特解为  $y = (x-1)e^{-\sin x}$ .

53. 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n$  的收敛半径及收敛区间 (考虑区间端点).

解: 这是标准的不缺项的幂级数, 收敛半径  $R = \frac{1}{\rho}$ ,

$$\text{而 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 3,$$

故收敛半径  $R = \frac{1}{3}$ .

当  $x = \frac{1}{3}$  时, 级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ , 这是调和级数, 发散的;

当  $x = -\frac{1}{3}$  时, 级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ , 这是交错级数, 满足莱布尼兹定理的条件, 收敛的;

所以级数的收敛域为  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

得分	评卷人

#### 四、应用题 (每题 7 分, 共计 14 分)

54. 过曲线  $y = x^2$  上一点  $M(1,1)$  作切线  $L$ ,  $D$  是由曲线  $y = x^2$ , 切线  $L$  及  $x$  轴所围成的平面图形, 求

(1) 平面图形  $D$  的面积;

(2) 该平面图形  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解: 平面图形  $D$  如图所示:

因  $y' = 2x$ , 所以切线  $L$  的斜率  $k = y'(1) = 2$ ,  
切线  $L$  的方程为  $y - 1 = 2(x - 1)$ , 即  $y = 2x - 1$

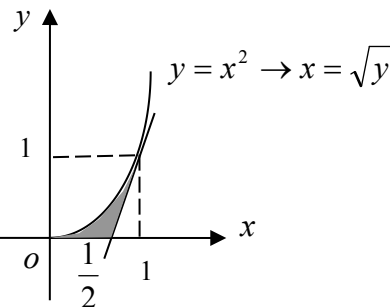
取  $x$  为积分变量, 且  $x \in [0, 1]$ .

(1) 平面图形  $D$  的面积为

$$S = \int_0^1 x^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 - \left. (x^2 - x) \right|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{12}.$$

(2) 平面图形  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所生成旋转体的体积为

$$V_x = \pi \int_0^1 x^4 dx - \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1)^2 dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^1 - \pi \left. \left( \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x \right) \right|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{30}.$$



55. 一块铁皮宽为 24 厘米, 把它的两边折上去, 做成一正截面为等腰梯形的槽 (如下图), 要使梯形的面积  $A$  最大, 求腰长  $x$  和它对底边的倾斜角  $\alpha$ .

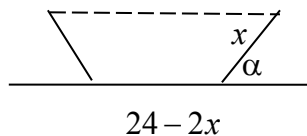
解: 梯形截面的下底长为  $24 - 2x$ , 上底长为  $24 - 2x + 2x \cos \alpha$ , 高为  $x \sin \alpha$ , 所以截面面积为

$$A = \frac{1}{2} (24 - 2x + 2x \cos \alpha + 24 - 2x) \cdot x \sin \alpha,$$

$$(0 < x < 12, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

即  $A = 24x \sin \alpha - 2x^2 \sin \alpha + x^2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,

$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x} = 24 \sin \alpha - 4x \sin \alpha + 2x \sin \alpha \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \alpha} = 24x \cos \alpha - 2x^2 \cos \alpha + x^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \end{cases} \quad \text{得唯一驻点} \begin{cases} x = 8 \\ \alpha = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$



根据题意可知, 截面的面积最大值一定存在, 且在  $D: 0 < x < 12, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  内取得, 又函数

在  $D$  内只有一个可能的最值点, 因此可以断定  $x = 8, \alpha = \frac{\pi}{3}$  时, 截面的面积最大.

得分	评卷人

### 五、证明题 (6 分)

56. 证明方程  $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  在区间  $(e, e^3)$  内仅有一个实根.

证明: 构造函数  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ ,

即有  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = \ln x - \frac{x}{e} + 2\sqrt{2}$ , 显然函数  $f(x)$  在区间  $[e, e^3]$  连续, 且有  $f(e) = 2\sqrt{2} > 0$ ,  $f(e^3) = 3 - e^2 + 2\sqrt{2} < 6 - e^2 < 0$ , 由连续函数的零点定理知方程  $f(x) = 0$  即  $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  在区间  $(e, e^3)$  有至少有一实数根.

另一方面,  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$  在区间  $(e, e^3)$  内恒小于零, 有方程  $f(x) = 0$ , 即  $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  在区间  $(e, e^3)$  有至多有一实数根.

综上所述, 方程  $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  在区间  $(e, e^3)$  内仅有一个实根.

**2011 年河南省普通高等学校**  
**选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试**  
**高等数学**

题 号	一	二	三	四	五	总 分
分 值	60	20	50	12	8	150

注意事项:

答题前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。  
本试卷的试题答案必须答在答题卡上, 答在试卷上无效。

一、选择题 (每小题 2 分, 共 60 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。

1. 函数  $f(x) = \ln(2-x) + \frac{x}{\sqrt{x+2}}$  的定义域为

- A.  $(-\infty, 2)$       B.  $(-2, +\infty)$       C.  $(-2, 2)$       D.  $(0, 2)$

【答案】C.

解:  $\begin{cases} 2-x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 2$ , 应选 C.

2. 设  $f(x+1) = x^2 + 2x + 2$ , 则  $f(x) =$

- A.  $x^2$       B.  $x^2 + 1$       C.  $x^2 - 5x + 6$       D.  $x^2 - 3x + 2$

【答案】B.

解: 令  $x+1 = t$ , 则  $x = t-1$ , 有  $f(t) = (t-1)^2 + 2(t-1) + 2 = t^2 + 1$ ,

所以  $f(x) = x^2 + 1$ , 应选 B.

3. 设函数  $f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 为奇函数,  $g(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 为偶函数, 则下列函数必为奇函数的是

- A.  $f(x) \cdot g(x)$       B.  $f[g(x)]$       C.  $g[f(x)]$       D.  $f(x) + g(x)$

【答案】A.

解: 根据奇偶函数的结论: 一奇一偶函数的乘积为奇函数, 应选 A.

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} =$

A. -1

B. 1

C. 0

D. 不存在

【答案】C.

解: 无穷小量与有界变量之积为无穷小量, 因此  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ , 应选 C.

5. 设  $f'(x) = 1$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x-3h)}{h} =$

A. 4

B. 5

C. 2

D. 1

【答案】B.

解:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x-3h)}{h} = 5f'(x) = 5$ , 应选 B.

6. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小量与  $x$  不等价的是

A.  $x - \frac{x^2}{2}$

B.  $e^x - 2x^2 - 1$

C.  $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$

D.  $\sin(x + \sin x)$

【答案】D.

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = 2$ , 应选 D.

7. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x + 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  则  $x = 0$  是

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 连续点

D. 第二类间断点

【答案】B.

解:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ , 应选 B.

8. 函数  $\sin x$  的三阶导数是

A.  $\sin x$

B.  $-\sin x$

C.  $\cos x$

D.  $-\cos x$

【答案】D.

解:  $(\sin x)''' = -\cos x$ , 应选 D.

9. 设  $x \in [-1, 1]$ , 则  $\arcsin x + \arccos x =$

A.  $\frac{\pi}{2}$

B.  $\frac{\pi}{4}$

C. 0

D. 1

【答案】A.

解:  $(\arcsin x + \arccos x)' = 0 \Rightarrow \arcsin x + \arccos x = C$

取  $x = 0$ , 得  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ , 应选 A.

10. 若  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ , 则下列表述正确的是

- A.  $x_0$  是函数  $f(x)$  的极大值点      B.  $x_0$  是函数  $f(x)$  的极小值点  
C.  $x_0$  不是函数  $f(x)$  的极值点      D. 无法确定  $x_0$  是否为函数  $f(x)$  的极值点

【答案】B.

解: 根据取得极值的第二充分条件知,  $x_0$  是函数  $f(x)$  的极小值点, 应选 B.

11. 方程  $y = \arcsin \frac{1}{x}$  所表示曲线

- A. 仅有水平渐近线  
B. 仅有垂直渐近线  
C. 既有水平渐近线, 又有垂直渐近线  
D. 既无水平渐近线, 又无垂直渐近线

【答案】A.

解:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{1}{x} = 0$ ;  $x \rightarrow 0$  时,  $y = \arcsin \frac{1}{x}$  无意义, 因此仅有水平渐近线, 应选 A.

12.  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$

- A. 0      B. 2      C. -2      D. 以上都不对

【答案】D.

解:  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx$ , 是二个  $q$  广义积分都发散, 因此原积分发散,

应选 D.

13. 方程  $\sin x + x - 1 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内根的个数是

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

【答案】B.

解: 设函数  $f(x) = \sin x + x - 1$ , 则  $f(0) = -1, f(1) = \sin 1$ ,  $f'(x) = \cos x + 1 > 0$ , 方程有唯一实根, 应选 B.



14. 若  $f(x)$  是  $\cos x$  的一个原函数, 则  $\int df(x) =$

- A.  $\sin x + C$     B.  $-\sin x + C$     C.  $-\cos x + C$     D.  $\cos x + C$

【答案】A.

解:  $f'(x) = \cos x$ , 则  $\int df(x) = \int f'(x)dx = \int \cos x dx = \sin x + C$ , 应选 A.

15. 设  $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\cos t} \sin t dt$ , 则  $F(x)$

- A. 为正常数    B. 为负常数    C. 恒为零    D. 不为常数

【答案】C.

解:  $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\cos t} \sin t dt = -\int_x^{x+2\pi} e^{\cos t} d \cos t = -e^{\cos t} \Big|_x^{x+2\pi} = 0$ , 应选 C.

16.  $\frac{d}{dx} \int_x^b te^t dt =$

- A.  $-xe^x$     B.  $xe^x$     C.  $b^b - e^x$     D.  $be^b - xe^x$

【答案】A.

解:  $\frac{d}{dx} \int_x^b te^t dt = -\frac{d}{dx} \int_x^a te^t dt = -x e^x$ , 应选 A.

17. 由曲线  $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$  与  $x$  轴所围成的区域的面积为

- A. 0    B. 2    C.  $\sqrt{2}$     D.  $\pi$

【答案】B.

解:  $S = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2$ , 应选 B.

18. 关于二阶常微分方程的通解, 下列说法正确的是

- A. 一定含有两个任意常数    B. 通解包含所有解  
C. 一个方程只有一个通解    D. 以上说法都不对

【答案】A.

解: 根据微分方程通解的概念知, 通解中一定含有两个任意常数, 应选 A.

19. 微分方程  $y' + 3y = x$  的通解是

- A.  $y = 2x + Ce^{2x} + 1$     B.  $y = xe^x + Cx - 1$   
C.  $y = 3x + Ce^x + \frac{1}{9}$     D.  $y = \frac{1}{3}x + Ce^{-3x} - \frac{1}{9}$

【答案】D.

解: 这是一阶线性微分方程, 代入通解公式有通解为

$$y = e^{-\int 3x dx} \left[ \int x e^{\int 3x dx} dx + C \right] = e^{-3x} \left[ \int x e^{3x} dx + C \right], \text{ 应选 D.}$$

20. 已知向量  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ , 则垂直于  $\vec{a}$  且垂直于  $y$  轴的向量是

- A.  $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$     B.  $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$     C.  $\vec{i} + \vec{k}$     D.  $\vec{i} - \vec{k}$

【答案】D.

解:  $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k}$ , 应选 D.

21. 对任意两个向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 下列等式不恒成立的是

- A.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$     B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$   
C.  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$     D.  $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$

【答案】C.

解: 因为  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ , 应选 C.

22. 直线  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$  与平面  $x + y + z = 2$  的位置关系是

- A. 平行    B. 直线在平面内  
C. 垂直    D. 相交但不垂直

【答案】A.

解: 直线的方向向量与平面法向量相互垂直, 则直线在平面内或直线平行于平面; 而点  $(0,0,0)$  不在平面内, 应有直线平行于平面, 应选 A.

23.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y}{\sin xy}$  的值为

- A. 0    B. 1    C.  $\frac{1}{2}$     D. 不存在

【答案】C.

解:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y}{\sin xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sin xy} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ , 应选 C.

24. 函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个偏导数  $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$  都存在且  $f(x, y)$  在该点处连续的

- A. 充要条件    B. 必要非充分条件

C. 充分非必要条件

D. 既非充分亦非必要条件

【答案】D.

解: 偏导数都存在不一定连续, 连续也不一定偏导数存在, 应选 D.

25. 函数  $z = \ln(1 + \frac{x}{y})$  在点  $(1, 1)$  处的全微分  $dz|_{(1,1)} =$

A. 0

B.  $\frac{1}{2}(dx - dy)$

C.  $dx - dy$

D.  $\frac{1}{x+y}dx - \frac{1}{y}dy$

【答案】B.

解:  $dz = d \ln \frac{x+y}{y} = d \ln(x+y) - d \ln y = \frac{dx+dy}{x+y} - \frac{dy}{y}$   
 $= \frac{dx}{x+y} + (\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y})dy \Rightarrow dz|_{(1,1)} = \frac{1}{2}(dx - dy)$ , 应选 B.

26. 设  $I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y}} 3x^2 y^2 dx$ , 则交换积分次序后

A.  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} 3x^2 y^2 dy$

B.  $\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 3x^2 y^2 dy$

C.  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} 3x^2 y^2 dy$

D.  $\int_0^1 dx \int_0^{1+x^2} 3x^2 y^2 dy$

【答案】C.

解:  $\{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y}\} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x^2\}$ ,

应选 C.

27. 设  $L$  为三个顶点分别为  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  和  $(0, 1)$  的三角形区域的边界,  $L$  的

方向为顺时针方向, 则  $\oint_L (3x - y)dx + (x - 2y)dy =$

A. 0

B. 1

C. 2

D. -1

【答案】D.

解: 因为  $\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ , 则

$$\begin{aligned} \oint_L (3x - y)dx + (x - 2y)dy &= - \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= -2 \iint_D dxdy = -2S_D = -1, \text{应选 D.} \end{aligned}$$

28.  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, -1 \leq y \leq 1 \right\}$ , 则  $\iint_D y \cos(2xy) dx dy =$

- A.  $-\frac{1}{2}$       B. 0      C.  $\frac{1}{4}$       D.  $\frac{1}{2}$

【答案】B.

解: 根据二重积分的对称性可知, 此积分值为零, 应选 B.

29. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都发散, 则下列表述必正确的是

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  发散      B.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  发散  
C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  发散      D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  发散

【答案】C.

解: A、B、D 都可以举出反例, 对于 C, 利用反证法, 假设  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  收敛,

可得  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是收敛, 矛盾, 应选 C.

30. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$  在  $x = -2$  处收敛, 则此级数在  $x = 4$  处

- A. 发散      B. 条件收敛      C. 绝对收敛      D. 收敛性不确定

【答案】C.

解: 令  $x - 2 = t$ , 化为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$  在  $t = -4$  处收敛, 问  $t = 2$  处是否收敛的问题,

根据阿贝尔定理绝对收敛, 应选 C.

二、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

31.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} =$  \_\_\_\_\_.

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \left[ \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{x}} \right]^{-1} = e^{-1}.$

32. 设  $f(x)$  为奇函数, 则  $f'(x_0) = 3$  时,  $f'(-x_0) =$  \_\_\_\_\_.

解:  $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'(-x_0) = 3.$

33. 曲线  $y = \ln x$  上点  $(1, 0)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

解:  $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow k = 1$ , 所以切线方程为  $y = x - 1$ .

34.  $\int \frac{1}{x(x-1)} dx =$ \_\_\_\_\_.

解:  $\int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln |x-1| + \ln |x| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$ .

35. 以  $C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$  为通解的二阶常系数齐次线性微分方程为\_\_\_\_\_.

解:  $C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$  为通解说明特征方程有两个相等实根  $-2$ , 所以  $p = 4, q = 4$ ,

故二阶常系数齐次线性微分方程为  $y'' + 4y' + 4y = 0$ .

36. 点  $(1, 2, 3)$  关于  $y$  轴的对称点为\_\_\_\_\_.

解: 根据关于  $y$  轴的对称点的特点知, 所求对称点为  $(-1, 2, -3)$ .

37. 函数  $z = e^{x+y}$  在点  $(0, 0)$  处得全微分  $dz|_{(0,0)} =$ \_\_\_\_\_.

解:  $dz = e^{x+y}(dx + dy) \Rightarrow dz|_{(0,0)} = dx + dy$ .

38. 由  $x + y + xy = 1$  所确定的隐函数  $y = y(x)$  在  $x = 1$  处得导数为\_\_\_\_\_.

解:  $dx + dy + x dy + y dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1-y}{1+x}$ ,

当  $x = 1$  时,  $y = 0$ , 所以  $\frac{dy}{dx}|_{(1,0)} = -\frac{1}{2}$ .

39. 函数  $z = x^2 + y^2$  在点  $(1, 2)$  处沿从点  $(1, 2)$  到点  $(2, 2 + \sqrt{3})$  方向的方向导数等于\_\_\_\_\_.

解: 从点  $(1, 2)$  到点  $(2, 2 + \sqrt{3})$  方向向量为  $\vec{s} = \{1, \sqrt{3}\}$ , 单位化后为  $\vec{s}^0 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$ ,

则  $\frac{\partial f}{\partial l}|_{(1,2)} = f_x(1, 2) \cos \alpha + f_y(1, 2) \sin \beta = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}$ .

40. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  的收敛区间为\_\_\_\_\_.

解:  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$ , 所以收敛区间为  $(-1, 1)$ .

说明: 教材不同给收敛区间定义不同, 有些书中收敛区间就是开区间; 有些书中收敛区间与收敛域是一致. 此题, 收敛域为  $[-1, 1)$ . 答案提出的是  $[-1, 1)$ . 但本人认为填  $(-1, 1)$  也应该正确.

### 三、计算题 (每小题 5 分, 共 50 分)

41. 用夹逼准则求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \right)$  的值.

解: 因为  $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}, k=1, 2, \dots, n$ ,

所以  $\frac{n^2}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n^2}{n^2+1}$  -----3 分

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$  -----4 分

由夹逼准则知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \right) = 1$  -----5 分

42. 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处可导性.

解: 因为  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0$  -----4 分

所以函数  $f(x)$  在  $x=0$  处可导, 且  $f'(0) = 0$  -----5 分

43. 求不定积分  $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$ .

解:  $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{1}{(e^x)^2+1} de^x$  -----2 分

$$\stackrel{e^x=u}{=} \int \frac{1}{u^2+1} du = \arctan u + C \text{ -----4 分}$$

$$= \arctan e^x + C \text{ -----5 分}$$

44. 求定积分  $\int_0^1 xe^x dx$ .

$$\text{解: } \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x de^x \text{ -----2 分}$$

$$= xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \text{ -----4 分}$$

$$= e - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1 \text{ -----5 分}$$

45. 求微分方程  $y'' + 3y' + 2y = e^x$  的通解

解: 这是二阶常系数非齐次线性微分方程, 其特征方程为  $r^2 + 3r + 2 = 0$ , 有两个特征根  $r_1 = -1, r_2 = -2$ , 从而对应的齐次方程通解为  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$  -----3 分,

设非齐次线性方程的一个特解为  $y = ae^x$ , 代入原方程有

$$ae^x + 3ae^x + 2ae^x = e^x, \text{ 解得 } a = \frac{1}{6} \text{ -----4 分}$$

故原方程的通解为  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x$ , 其中  $C_1, C_2$  是两个任意常数. -----5 分

46. 设  $z = \varphi(x+y, x^2)$ , 且  $\varphi$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解: 因为  $z = \varphi(x+y, x^2)$ , 且  $\varphi$  具有二阶连续偏导数,

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1 \frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \varphi_2 \frac{d(x^2)}{dx} = \varphi_1 + 2x\varphi_2 \text{ -----2 分}$$

$$\text{从而 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\varphi_1 + 2x\varphi_2)}{\partial y} = \varphi_{11} \frac{\partial(x+y)}{\partial y} + 2x\varphi_{21} \frac{\partial(x+y)}{\partial y} \text{ -----4 分}$$

$$= \varphi_{11} + 2x\varphi_{21} \text{ -----5 分}$$

47. 求曲面  $e^z = z + xy = 3$  在点  $(2, 1, 0)$  处的切平面方程.

解: 构造函数  $F(x, y, z) = e^z - z + xy - 3$ , -----1 分

则  $F_x(x, y, z) = y, F_y(x, y, z) = x, F_z(x, y, z) = e^z - 1$  -----2 分

所以  $F_x(2, 1, 0) = 1, F_y(2, 1, 0) = 2, F_z(2, 1, 0) = 0$ , -----3 分

故曲面在点  $(2, 1, 0)$  处法向量为  $\vec{n} = \{1, 2, 0\}$ . -----4 分

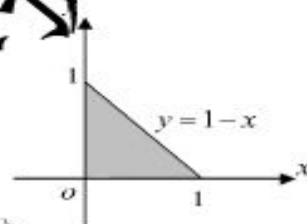
所以所求的切平面为  $(x - 2) + 2(y - 1) = 0$ , 即  $x + 2y - 4 = 0$  -----5 分

48. 求二重积分  $\iint_D e^{x+y} d\sigma$ , 其中  $D$  是由直线  $x + y = 1$  和其余坐标轴所围成的闭区域。

解: 积分区域如图所示, 看作 X 型有

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}, \text{---2 分}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \iint_D e^{x+y} d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{x+y} dy \text{---3 分} \\ &= \int_0^1 e^{x+y} \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 (e^1 - e^x) dx = (e^1 - e^x) \Big|_0^1 = 1. \text{---5 分} \end{aligned}$$



49. 计算  $\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ ,  $L$  是从点  $A(1, 1, 1)$  到点  $B(1, 1, 4)$  的直线段.

解:  $L$  参数方程为  $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1+3t \end{cases} \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1, \text{-----3 分}$

$$\text{所以 } \int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz = \int_0^1 d(1 + 3t) = 3 \text{-----5 分}$$

50. 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  展开成  $(x + 1)$  的幂级数.

解: 令  $x + 1 = t$ , 则  $x = t - 1$ , 有  $f(x) = \frac{1}{(t - 1)^2}$  -----1 分

$$\text{而 } f(x) = \frac{1}{(t - 1)^2} = \left( \frac{1}{1 - t} \right)' \text{-----2 分}$$



因为  $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, (-1 < t < 1)$ , -----3 分

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} \quad (-1 < t < 1) \text{-----4 分} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^{n-1}, x \in (-2, 0) \text{-----5 分} \end{aligned}$$

#### 四、应用题 (每小题 6 分, 共 12 分)

51. 求点 (0,1) 到抛物线  $y = x^2$  上的点的距离的平方的最小值.

解法一: 设点 (0,1) 到抛物线  $y = x^2$  上的点  $(x, y)$  的距离为  $d$ ,

$$\text{则 } d^2 = x^2 + (y-1)^2 = y + (y-1)^2 = y^2 - y + 1 \text{-----3 分}$$

令  $(d^2)'_y = 2y - 1 = 0$ , 得唯一可能的极值点  $y = \frac{1}{2}$ , -----4 分

而  $(d^2)''_y = 2 > 0$ , 故  $y = \frac{1}{2}$  就是使  $d^2$  取得极小值的点, 即为最小值点, ----5 分

$$\text{最小值为 } d^2 \Big|_{y=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \text{-----6 分}$$

解法二: 设点 (0,1) 到抛物线  $y = x^2$  上的点  $(x, y)$  的距离为  $d$ ,

$$\text{则 } d^2 = x^2 + (y-1)^2, y = x^2, \text{-----1 分}$$

构造函数  $F(x, y, z) = x^2 + (y-1)^2 + \lambda(x^2 - y)$  -----2 分

$$\text{令 } \begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = 2(y-1) - \lambda = 0, \text{-----4 分} \\ F'_z(x, y, \lambda) = x^2 - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{得可能最小值点 } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{-----5 分}$$

$$\text{由于 } d^2\Big|_{(0,0)} = 1, d^2\Big|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{3}{4}, d^2\Big|_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{3}{4}$$

所以点  $(0, 1)$  到抛物线  $y = x^2$  上的点的距离的平方的最小值为  $\frac{3}{4}$ . -----6 分

52. 求几何体  $x^2 + y^2 + 4z^4 \leq 4$  的体积.

解法一: 易知几何体  $x^2 + y^2 + 4z^4 \leq 4$  是由  $yo z$  平面图形  $y^2 + 4z^4 = 4$  绕  $z$  轴旋转所得的几何体, -----2 分

由方程  $y^2 + 4z^4 = 4$  可知,  $-2 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 1$ , 看作 Z 型图形绕  $z$  旋转, -----2 分

则有所求几何体的体积为

$$V = \pi \int_{-1}^1 f^2(z) dz = \pi \int_{-1}^1 y^2 dz = 4\pi \int_{-1}^1 (1 - z^4) dz = \frac{32}{5}\pi. \text{-----6 分}$$

解法二: 易见几何体  $x^2 + y^2 + 4z^4 \leq 4$  被平面  $z = h (-1 \leq h \leq 1)$  所截而得的截面是一个半径为  $2\sqrt{1-h^4}$  的圆面, 其面积为  $S_z = 4\pi(1-h^4)$ , -----3 分

因此几何体的体积为  $V = \int_{-1}^1 S_z dz = \int_{-1}^1 4\pi(1-z^4) dz = \frac{32}{5}\pi$  -----6 分

解法三: 令  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ , 则几何体可看作以  $D$  为底, 以  $z = f(x, y)$  为曲顶的曲顶柱体体积的 2 倍, -----1 分

故所求几何体  $x^2 + y^2 + 4z^4 \leq 4$  的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{4}} d\sigma \quad \text{-----2 分} \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r \sqrt{1 - \frac{r^2}{4}} dr \quad \text{-----4 分} \\ &= -\pi\sqrt{2} \int_0^2 \sqrt{4-r^2} d(4-r^2) \\ &= -\pi\sqrt{2} \left( \frac{4}{5} (4-r^2)^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi \quad \text{-----6 分} \end{aligned}$$

五、证明题 (8 分)

53. 设函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  均在闭区间  $[a, b]$  上连续,  $f(a) = g(b)$ ,  $f(b) = g(a)$ , 且  $f(a) \neq f(b)$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = g(\xi)$ .

证明: 令  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 则函数  $F(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, ---2 分

由  $f(a) = g(b)$ ,  $f(b) = g(a)$ ,  $f(a) \neq f(b)$  可得

$$F(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(b) \neq 0, \text{ ---3 分}$$

$$F(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a) \neq 0, \text{ ---4 分}$$

显然  $F(a) \cdot F(b) < 0$  ---6 分

于是由连续函数的零点定理知,  $\xi \in (a, b)$ ,  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = g(\xi)$ . ---8 分

2009 年河南省普通高等学校  
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试  
高等数学

题号	一	二	三	四	五	总分
分值	60	30	40	14	6	150

注意事项:

答题前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号涂写在答题卡上。

本试卷的试题答案应答在答题卡上, 答在试卷上无效。

一、选择题 (每小题2 分, 共60 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。

1. 下列函数相等的是

A.  $y = \frac{x^2}{x}$ ,

B.  $y = \sqrt[3]{x^2}$ ,  $y =$

C.  $y = x$ ,  $y = \sqrt{x^2}$

D.  $y = |x|$ ,  $y = \sqrt{x^2}$

2. 下列函数中为奇函数的是

A.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

B.  $f(x) = x \tan x$

C.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

D.  $f(x) = \frac{x}{1-x}$

3. 极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|}$  的值是

A. 1

B. -1

C. 0

D. 不存在

4. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小量中与  $x$  等价的是

A.  $2x^2$

B.  $\sqrt[3]{x}$

C.  $\ln(1+x)$

D.  $\sin^2 x$

5. 设  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ , 则  $x = 0$  是  $f(x)$  的

A. 连续

B. 可去间断

C. 跳跃间断

D. 无穷间断点

6. 设函数  $f(x)$  可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$ , 则  $f'(1) =$

A. 2

B. -

C. 1

D. -2

7. 设函数  $f(x)$  具有四阶导数, 且  $f'(x) = \sqrt{x}$ , 则  $f^{(4)}(x) =$
- A.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$       B.  $\sqrt{x}$       C. 1      D.  $-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$
8. 曲线  $\begin{cases} y = \sin 2t \\ x = \cos t \end{cases}$  在  $t = \frac{\pi}{4}$  对应点处的法线方程为
- A.  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $y =$       C.  $y = x +$       D.  $y = x - 1$
9. 已知  $d[e^{-x} f(x)] = e^x dx$ , 且  $f(0) = 0$ , 则  $f(x) =$
- A.  $e^{2x} + e^x$       B.  $e^{2x} - e^x$       C.  $e^{2x} + e^{-x}$       D.  $e^{2x} - e^{-x}$
10. 函数在某点处连续是其在该点处可导
- A. 必要条      B. 充分条      C. 充分必要条      D. 无关条件
11. 曲线  $y = x^4 - 24x^2 + 6x$  的凸区间为
- A.  $(-2, 2)$       B.  $(-\infty,$       C.  $(0, +\infty)$       D.  $(-\infty, +\infty)$
12. 曲线  $y = \frac{e^x}{x}$
- A. 仅有水平渐近线      B. 既有水平又有垂直渐近线  
C. 仅有垂直渐近线      D. 既无水平又无垂直渐近线
13. 下列说法正确的
- A. 函数的极值点一定是函数的驻点      B. 函数的驻点一定是函数的极值点  
C. 二阶导数非零的驻点一定是极值点      D. 以上说法都不对
14. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且不是常数函数, 若  $f(a) = f(b)$ , 则在  $(a, b)$  内
- A. 必有最大值或最小值      B. 既有最大值又有最小值  
C. 既有极大值又有极小值      D. 至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) = 0$
15. 若  $f(x)$  的一个原函数是  $\ln x$ , 则  $f'(x) =$
- A.  $\frac{1}{x}$       B.  $\frac{1}{x^2}$       C.  $\ln$       D.  $x \ln$
16. 若  $\int f(x) dx = x^2 + C$ , 则  $\int xf(1-x^2) dx =$
- A.  $-2(1-x^2)^2 + C$       B.  $2(1-x^2)^2 +$   
C.  $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 +$       D.  $\frac{1}{2}C$

17. 下列不等式中不成立的

- A.  $\int_1^2 \ln x dx > \int_1^2 (\ln^2 x)$  B.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$   
 C.  $\int_0^2 \ln(1+x) dx < \int_0^2 x dx$  D.  $\int_0^2 e^x dx < \int_0^2 (1+x) dx$

18.  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx =$

- A.  $\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$  B.  $\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx - \int_1^e \ln x dx$   
 C.  $-\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$  D.  $-\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx - \int_1^e \ln x dx$

19. 下列广义积分中收敛的

- A.  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$  B.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$   
 C.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$  D.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x}} dx$

20. 方程  $x^2 + y^2 - z = 0$  在空间直角坐标系中表示的曲面是

- A. 球 B. 圆锥 C. 旋转抛物面 D. 圆柱

21. 设  $\vec{a} = \{-1, 1, 2\}$ ,  $\vec{b} = \{2, 0, 1\}$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为

- A. B.  $\frac{\pi}{6}$  C.  $\frac{\pi}{4}$  D.  $\frac{\pi}{2}$

22. 直线  $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$  与平面  $4x - 2y - 2z = 3$  的位置关系

- A. 平行但直线不在平面上 B. 直线在平面上  
 C. 垂直 D. 相交但不垂直

23. 设  $f(x, y)$  在点  $(a, b)$  处有偏导数, 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a-h, b)}{h} =$

- A. 0 B.  $2f'_x(a, b)$  C.  $f'_x(a, b)$  D.  $f'_y(a, b)$

24. 函数  $z = \frac{x+y}{x-y}$  的全微分  $dz =$

A.  $\frac{2(xdx - ydy)}{(x-y)^2}$

B.  $\frac{2(ydy - xdx)}{(x-y)^2}$

C.  $\frac{2(ydx - xdy)}{(x-y)^2}$

D.  $\frac{2(xdy - ydx)}{(x-y)^2}$

25.  $\int_0^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^a f(x, y) dx$  化为极坐标形式为

A.  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r$

B.  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

C.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

D.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r$

26. 设  $L$  是以  $A(-1,0), B(-3,2), C(3,0)$  为顶点的三角形区域的边界, 方向  $ABCA$ , 则  $\oint_L (3x-y)dx + (x-2y)dy =$

A.  $-8$

B.  $0$

C.  $8$

D.  $20$

27. 下列微分方程中, 可分离变量的方程是

A.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$

B.  $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

C.  $\frac{x}{y}dx + e^{x^2+y^2}dy = 0$

D.  $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

28. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则下列级数中收敛的是

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{10}$

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 10)$

C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{u_n}$

D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n -$

29. 函数  $f(x) = \ln(1-x)$  的幂级数展开式

A.  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, -1 < x \leq 1$

B.  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, -1 < x \leq 1$

C.  $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots, -1 \leq x < 1$

D.  $-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots, -1 \leq x < 1$

30. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a(x-1)^n$  在  $x = -1$  处收敛, 则此级数在  $x = 2$  处

A. 条件收

B. 绝对收

C. 发

D. 无法确

二、填空题 (每小题2 分, 共30 分)

31. 已知  $f(x) = \frac{x}{1-x}$ , 则  $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

32. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  与  $1 - \cos x$  等价, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

33. 若  $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{x+2}{x-a} \right|^x = 8$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

34. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内处处连续, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

35. 曲线  $y = \frac{3x}{1+x}$  在  $(2, 2)$  点处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

36. 函数  $f(x) = x^2 - x - 2$  在区间  $[0, 2]$  上使用拉格朗日中值定理时, 结  
的  $\xi = \underline{\hspace{2cm}}$ .

37. 函数  $f(x) = x - \sqrt{x}$  的单调减少区间是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

38. 已知  $f(0) = 2, f'(0) = 3, f''(0) = 4$ , 则  $\int_0^2 x f''(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

39. 设向量  $\vec{b}$  与  $\vec{a} = \{1, -2, 3\}$  共线, 且  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 56$ , 则  $\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

40. 设  $z = e^{x^2 + y}$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

41. 函数  $f(x, y) = 2x^2 + xy - 2y^2$  的驻点为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

42. 设区域  $D$  为  $x^2 + y^2 \leq 9$ , 则  $\iint_D x^2 y d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$ .

43. 交换积分次序后,  $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

44. 已知  $y = \frac{1}{4} x e^{-x}$  是微分方程  $y' - 2y' - 3y = e^{-x}$  的一个特解, 则该方程的通  
解为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

45. 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的部分和  $S_n \sim n^{\frac{3}{2}}$ , 则当  $n \geq 2$  时,  $u_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .



三、计算题（每小题5 分，共40 分）

46. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right|$ .

47. 设 $y = f(x)$  是由方程 $e^{xy} + y \ln x = \sin 2x$  确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$

48. 已知 $\int x f(x) dx = e^{-2x} + C$  , 求 $\int \frac{1}{f(x)} dx$ .

49. 求 $\int_{-4}^4 x(x-1) dx$

50. 已知 $z = e^{x^2+xy-y^2}$  , 求全微分 $dz$ .

51. 求 $\iint_D (2x+y) d\sigma$  , 其中区域 $D$  由直线 $y = x, y = 2x, y = 2$  围成.

52. 求微分方程 $y' - 2xy = xe^{-x}$  的通解.

53. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}$  的收敛区间（考虑区间的端点）.

四、应用题（每小题7 分，共14 分）

54. 靠一堵充分长的墙边,增加三面墙围成一矩形场地,在限定场地面积为 $64m^2$ 的条件下,问增加的三面墙各长多少时,其总长最小.

55. 设  $D$  是由曲线 $y = f(x)$  与直线 $y = 0, y = 3$  围成的区域, 其

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 6 - x, & x > 2 \end{cases},$$

求 $D$  绕 $y$  轴旋转形成的旋转体的体积.

五、证明题（6 分）

56. 设 $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$  , 其中函数 $f(x)$  在闭区间 $[a,b]$  上连续,  $f(x) > 0$  , 证明在开区间 $(a,b)$  内, 方程 $F(x) = 0$  有唯一实根

2012 年河南省普通高等学校

选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试

《高等数学》试卷

一. 单项选择题 (每题 2 分, 共计 50 分)

1. 集合  $\{3,4,5\}$  的所有子集共有

( )

- A. 5                  B. 6                  C. 7                  D. 8

解: 子集个数  $2^n = 2^3 = 8 \Rightarrow D$ 。

2. 函数  $f(x) = \arcsin(x-1) + \sqrt{3-x}$  的定义域为

( )

- A.  $[0,3]$               B.  $[0,2]$               C.  $[2,3]$               D.  $[1,3]$

解:  $\begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 1 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow B$ 。

3. 当  $x \rightarrow 0$  时, 与  $x$  不等价的无穷小量是

( )

- A.  $2x$                   B.  $\sin x$                   C.  $e^x - 1$                   D.  $\ln(1+x)$

解: 根据常用等价关系知, 只有  $2x$  与  $x$  比较不是等价的。应选 A。

4. 当  $x = 0$  是函数  $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$  的

( )

- A. 连续点              B. 可去间断点              C. 跳跃间断点              D. 第二类间断点

解:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow C$ 。

5. 设  $f(x)$  在  $x=1$  处可导, 且  $f'(1)=1$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1+h)}{h}$  的值为 ( )

- A. -1                  B. -2                  C. -3                  D. -4

解:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [-2f'(1-2h) - f'(1+h)] = -3f'(1) = -3 \Rightarrow C$ 。

6. 若函数  $f(x)$  在区间  $(a,b)$  内有  $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ , 则在区间  $(a,b)$  内,  $f(x)$  图形

( )

- A. 单调递减且为凸的                  B. 单调递增且为凸的

C. 单调递减且为凹的                      D. 单调递增且为凹的

解:  $f'(x) > 0 \Rightarrow$  单调增加;  $f''(x) < 0 \Rightarrow$  凸的。应选 B。

7. 曲线  $y = 1 + x^3$  的拐点是 ( )

A. (0,1)              B. (1,0)              C. (0,0)              D. (1,1)

解:  $y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,1)$ , 应选 A。

8. 曲线  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{3x^2}$  的水平渐近线是 ( )

A.  $y = \frac{2}{3}$               B.  $y = -\frac{2}{3}$               C.  $y = \frac{1}{3}$               D.  $y = -\frac{1}{3}$

解:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2}{3x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow C$ 。

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \tan t dt}{x^4} =$  ( )

A. 0                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. 2                      D. 1

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \tan x dx}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \tan x^2}{4x^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow B$ 。

10. 若函数  $f(x)$  是  $g(x)$  的原函数, 则下列等式正确的是 ( )

A.  $\int f(x) dx = g(x) + C$                       B.  $\int g(x) dx = f(x) + C$   
C.  $\int g'(x) dx = f(x) + C$                       D.  $\int f'(x) dx = g(x) + C$

解: 根据不定积分与原函数的关系知,  $\int g(x) dx = f(x) + C$ 。应选 B。

11.  $\int \cos(1 - 3x) dx =$  ( )

A.  $-\frac{1}{3} \sin(1 - 3x) + C$                       B.  $\frac{1}{3} \sin(1 - 3x) + C$   
C.  $-\sin(1 - 3x) + C$                       D.  $3 \sin(1 - 3x) + C$

解:  $\int \cos(1 - 3x) dx = -\frac{1}{3} \int \cos(1 - 3x) d(1 - 3x) = -\frac{1}{3} \sin(1 - 3x) + C \Rightarrow A$ 。

12. 设  $y = \int_0^x (t-1)(t-3) dt$ , 则  $y'(0) =$  ( )

A. -3                      B. -1                      C. 1                      D. 3

解:  $y' = (x-1)(x-3) \Rightarrow y'(0) = 3 \Rightarrow D$ 。

13. 下列广义积分收敛的是 ( )

A.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$                       B.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

C.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$  D.  $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

解：由  $p$  积分和  $q$  积分的收敛性知， $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$  收敛，应选 C。

14. 对不定积分  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ ，下列计算结果错误的是 ( )

- A.  $\tan x - \cot x + C$  B.  $\tan x - \frac{1}{\tan x} + C$   
C.  $\cot x - \tan x + C$  D.  $-\cot 2x + C$

解：分析结果，就能知道选择 C。

15. 函数  $y = x^2$  在区间  $[1, 3]$  的平均值为 ( )

- A.  $\frac{26}{3}$  B.  $\frac{13}{3}$  C. 8 D. 4

解： $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{6} \Big|_1^3 = \frac{13}{3} \Rightarrow B$ 。

16. 过  $Oz$  轴及点  $(3, -2, 4)$  的平面方程为 ( )

- A.  $3x + 2y = 0$  B.  $2y + z = 0$   
C.  $2x + 3y = 0$  D.  $2x + z = 0$

解：经过  $Oz$  轴的平面可设为  $Ax + By = 0$ ，把点  $(3, -2, 4)$  代入得  $2x + 3y = 0$  应选 C。

也可以把点  $(3, -2, 4)$  代入所给的方程验证，且不含  $z$ 。

17. 双曲线  $\begin{cases} \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转所成的曲面方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2 + y^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1$  B.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2 + z^2}{4} = 1$   
C.  $\frac{(x + y)^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1$  D.  $\frac{x^2}{3} - \frac{(y + z)^2}{4} = 1$

解：把  $\frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1$  中  $x^2$  换成  $x^2 + y^2$  得  $\frac{x^2 + y^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1$ ，应选 A。

18.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{xy + 9}}{xy} =$  ( )

- A.  $\frac{1}{6}$  B.  $-\frac{1}{6}$  C. 0 D. 极限不存在

解:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{xy+9}}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{-xy}{xy(3 + \sqrt{xy+9})} = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{3 + \sqrt{xy+9}} = -\frac{1}{6} \Rightarrow B$ 。

19. 若  $z = x^y$ , 则  $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(e,1)} =$  ( )

A.  $\frac{1}{e}$       B. 1      C.  $e$       D. 0

解:  $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(e,1)} = x^y \ln x \Big|_{(e,1)} = e \ln e = e \Rightarrow C$ 。

20. 方程  $z^2 y - xz^3 = 1$  所确定的隐函数为  $z = f(x, y)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  ( )

A.  $\frac{z^2}{2y - 3xz}$       B.  $\frac{z^2}{3xz - 2y}$       C.  $\frac{z}{2y - 3xz}$       D.  $\frac{z}{3xz - 2y}$

解: 令  $F = z^2 y - xz^3 - 1 \Rightarrow F'_x = -z^3; F'_z = 2zy - 3xz^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{z^2}{2y - 3xz}$ , 应选 A。

21. 设  $C$  为抛物线  $y = x^2$  上从  $(0,0)$  到  $(1,1)$  的一段弧, 则  $\int_C 2xy dx + x^2 dy =$  ( )

A. -1      B. 0      C. 1      D. 2

解:  $C: \begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases}, x \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1, \int_C 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 4x^3 dx = 1 \Rightarrow C$ 。

22. 下列正项级数收敛的是 ( )

A.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$       B.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$   
C.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$       D.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}} \sqrt{n}}$

解: 对级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 、 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$  需要利用积分判别法, 超出大纲范围。级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  有结论: 当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散。级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ 、 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}} \sqrt{n}}$  与级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  利用比较判别法的极限形式来确定——发散的, 应选 C。

23. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} (x+1)^n$  的收敛区间为 ( )

A.  $(-1, 1)$       B.  $(-3, 3)$       C.  $(-2, 4)$       D.  $(-4, 2)$

解: 令  $x+1 = t$ , 级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} t^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^n \Rightarrow$  收敛区间为  $(-3, 3)$ , 即  $x+1 \in (-3, 3) \Rightarrow x \in (-4, 2) \Rightarrow D$ 。

24. 微分  $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \cos x$  特解形式应设为  $y^* =$  ( )

- A.  $Ce^x \cos x$                       B.  $e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$   
 C.  $xe^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$                       D.  $x^2 e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

解:  $-1+i$  不是特征方程的特征根, 特解应设为  $e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ 。应选 B。

25. 设函数  $y = f(x)$  是微分方程  $y'' + y' = e^{2x}$  的解, 且  $f'(x_0) = 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处 ( )

- A. 取极小值              B. 取极大值              C. 不取极值              D. 取最大值

解: 有  $f''(x_0) + f'(x_0) = e^{2x_0} \Rightarrow f''(x_0) = e^{2x_0} > 0 \Rightarrow A$ 。

得分	评卷人

## 二、填空题 (每题 2 分, 共 30 分)

26. 设  $f(x) = 2x + 5$ , 则  $f[f(x) - 1] =$ \_\_\_\_\_.

解:  $f[f(x) - 1] = 2(f(x) - 1) + 5 = 2f(x) + 3 = 2(2x + 5) + 3 = 4x + 13$ 。

27.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} =$ \_\_\_\_\_.

解: 构造级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ , 利用比值判别法知它是收敛的, 根据收敛级数的必要条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ 。

28. 若函数  $f(x) = \begin{cases} 3e^{4x}, & x < 0 \\ 2x + \frac{a}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

解:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{a}{2}; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 \Rightarrow a = 6$ 。

29. 已知曲线  $y = x^2 + x - 2$  上点  $M$  处的切线平行于直线  $y = 5x - 1$ , 则点  $M$  的坐标为 \_\_\_\_\_

解:  $y' = 2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow M(2, 4)$ 。

30. 设  $f(x) = e^{2x-1}$ , 则  $f^{(2007)}(0) =$ \_\_\_\_\_

解:  $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x-1} \Rightarrow f^{(2007)}(0) = 2^{2007} e^{-1}$ 。

31. 设  $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t^2 - t + 1 \end{cases}$ , 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} =$ \_\_\_\_\_

解:  $\frac{dy}{dx} = \frac{4t-1}{3} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1$ 。

32. 若函数  $f(x) = ax^2 + bx$  在  $x = 1$  处取得极值 2, 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_

解:  $f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0; a + b = 2 \Rightarrow a = -2; b = 4$ 。

33.  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$  \_\_\_\_\_

解:  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C$ 。

34.  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx =$ \_\_\_\_\_

解:  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} S_{\text{圆}} = \frac{\pi}{4}$ 。

35. 向量  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$  的模  $|\vec{a}| =$ \_\_\_\_\_

解:  $|3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$ 。

36. 已知平面  $\pi_1: x + 2y - 5z + 7 = 0$  与平面  $\pi_2: 4x + 3y + mz + 13 = 0$  垂直, 则  $m =$ \_\_\_\_\_

解:  $\vec{n}_1 = \{1, 2, -5\}; \vec{n}_2 = \{4, 3, m\} \Rightarrow 4 + 6 - 5m = 0 \Rightarrow m = 2$ 。

37. 设  $f(x+y, xy) = x^2 + y^2$ , 则  $f(x, y) =$ \_\_\_\_\_

解:  $f(x+y, xy) = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \Rightarrow f(x, y) = x^2 - 2y$ 。

38. 已知  $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ , 交换积分次序后, 则  $I =$ \_\_\_\_\_

解:  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\}$   
 $= \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq y \leq x \right\} + \left\{ (x, y) \mid \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$ , 所以次序交换后为  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ 。

39. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$  的和为 \_\_\_\_\_

解:  $S_n = \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) + \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$ , 所以  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{u_1}$ 。

40. 微分方程  $y'' - 2y' + y = 0$  的通解为\_\_\_\_\_

解: 有二重特征根 1, 故通解为  $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$  ( $C_1, C_2$  为任意常数)。

得分	评卷人

### 三、判断题 (每小题 2 分, 共 10 分)

你认为正确的在题后括号内划“√”, 反之划“×”。

41. 若数列  $\{x_n\}$  单调, 则  $\{x_n\}$  必收敛。 ( )

解: 如数列  $\{n\}$  单调, 但发散, 应为×。

42. 若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) \neq f(b)$ , 则一定不存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ 。 ( )

解: 如  $y = x^2$  在  $[-1, 3]$  满足上述条件, 但存在  $\xi = 0 \in [-1, 3]$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ , 应为×。

43.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \stackrel{\text{由洛比达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$ 。 ( )

解：第二步不满足  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$ ，是错误的，事实上  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$ 。应为  $\times$ 。

44.  $0 \leq \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 2$ . ( )

解：因  $0 < \sqrt{1 - e^{-2x}} < 1$ ，由定积分保序性知： $0 \leq \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx \leq \ln 2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 2$ ，应为  $\checkmark$ 。

45. 函数  $f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  处可微是  $f(x, y)$  在  $P(x, y)$  处连续的充分条件. ( )

解： $f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  处可微可得  $f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  处连续，反之不成立，应为应为  $\checkmark$ 。

得分	评卷人

四、计算题（每小题 5 分，共 40 分）

46. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ .

解： $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x} \stackrel{\sin x \sim x}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = e^0 = 1.$$

47. 求函数  $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

解： 两边取自然对数得  $\ln |y| = 2 \ln |x| + \frac{1}{3} [\ln |1-x| - \ln |1+x|]$ ， ---- (1 分)

两边对  $x$  求导得： $\frac{1}{y} y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{3} \left[ \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right]$ ， ----- (3 分)

即  $y' = y \left[ \frac{2}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)} \right]$ ， ----- (4 分)

故  $\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \left[ \frac{2}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)} \right]$ 。 ----- (5 分)

48. 求不定积分  $\int [e^{2x} + \ln(1+x)] dx$ .

解： $\int [e^{2x} + \ln(1+x)] dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) + \int \ln(1+x) dx$  ---- (1 分)

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + x \ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x} dx \text{ ---- (3 分)}$$



$$= \frac{1}{2}e^{2x} + x \ln(1+x) - \int \left[ 1 - \frac{1}{1+x} \right] dx \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + x \ln(1+x) - x + \ln(1+x) + C. \quad (5 \text{ 分})$$

49. 计算定积分  $\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos 2x} dx$  .

解: 因  $2+2\cos 2x = 2(1+\cos 2x) = 4\cos^2 x$ , 所以

$$\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos 2x} dx = \int_0^\pi \sqrt{4\cos^2 x} dx = \int_0^\pi 2|\cos x| dx \quad (2 \text{ 分})$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx \quad (4 \text{ 分})$$

$$= 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 2 + 2 = 4. \quad (5 \text{ 分})$$

50. 设  $z = f(e^x \sin y, 3x^2 y)$ , 且  $f(u, v)$  为可微函数, 求  $dz$ .

解: 令  $e^x \sin y = u$ ,  $3x^2 y = v$ , 有  $z = f(u, v)$ , 利用微分的不变性得

$$dz = f'_u(u, v)du + f'_v(u, v)dv = f'_u d(e^x \sin y) + f'_v d(3x^2 y) \quad (3 \text{ 分})$$

$$= f'_u (e^x \sin y dx + e^x \cos y dy) + f'_v (6xy dx + 3x^2 dy) \quad (4 \text{ 分})$$

$$= (e^x \sin y f'_u + 6xy f'_v) dx + (e^x \cos y f'_u + 3x^2 f'_v) dy \quad (5 \text{ 分})$$

51. 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ , 其中  $D$  为圆环区域:  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ .

解: 积分区域  $D$  如图 07-1 所示:  $D$  的边界  $x^2 + y^2 = 1$ 、 $x^2 + y^2 = 4$  用极坐标表示分别为  $r = 1$ ,  $r = 2$ ; 故积分区域  $D$  在极坐标系下为  $\{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq 2\}$ , (2 分)

$$\text{故 } \iint_D x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \cos^2 \theta r dr \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_1^2 r^3 dr = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_1^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{15}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{15}{8} \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 \theta d\theta \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \frac{15}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{15}{8} \left( \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{15\pi}{4}. \quad (5 \text{ 分})$$

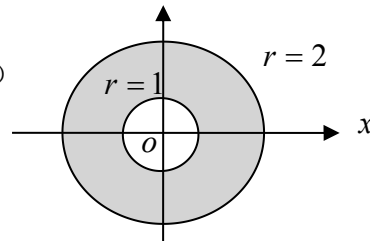


图 07-1

52. 将  $\frac{2x}{4-x^2}$  展开为  $x$  的幂级数, 并写出收敛区间.

$$\text{解: 因 } \frac{2x}{4-x^2} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} - \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}; \quad (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in (-1,1)。$$

$$\text{所以 } \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad x \in (-2,2); \quad \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n \quad x \in (-2,2)。 \text{--- (3 分)}$$

$$\text{故 } \frac{2x}{4-x^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}}\right) x^n \quad x \in (-2,2) \text{--- (4 分)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} x^{2n+1} \quad x \in (-2,2)。 \text{--- (5 分)}$$

53. 求微分方程  $x^2 dy + (y - 2xy - x^2) dx = 0$  的通解.

解: 方程可化为  $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$ , 这是一阶线性非齐次微分方程, --- (1 分)

它对应的齐次方程  $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 0$  的通解为  $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}}$ , --- (2 分)

设原方程有通解  $y = C(x)x^2 e^{\frac{1}{x}}$ , 代入方程得  $C'(x)x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1$ ,

$$\text{即 } C'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, \text{--- (3 分)}$$

$$\text{所以 } C(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = e^{-\frac{1}{x}} + C, \text{--- (4 分)}$$

故所求方程的通解为  $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$ 。 --- (5 分)

得分	评卷人

### 五、应用题 (每题 7 分, 共计 14 分)

54. 某工厂欲建造一个无盖的长方体污水处理池, 设计该池容积为  $V$  立方米, 底面造价每平方米  $a$  元, 侧面造价每平方米  $b$  元, 问长、宽、高各为多少米时, 才能使污水处理池的造价最低?

解: 设长方体的长、宽分别为  $x, y$ , 则高为  $\frac{V}{xy}$ , 又设造价为  $z$ , --- (1 分)

由题意可得

$$z = axy + 2b(x+y)\frac{V}{xy} = axy + \frac{2bV}{y} + \frac{2bV}{x} \quad (x > 0, y > 0); \text{--- (3 分)}$$

而  $\frac{\partial z}{\partial x} = ay - \frac{2bV}{x^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ax - \frac{2bV}{y^2}$ ; 在定义域内都有意义.

$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = ay - \frac{2bV}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = ax - \frac{2bV}{y^2} = 0 \end{cases} \text{得唯一驻点 } x = y = \sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}, \text{----- (5 分)}$$

由题可知造价一定在内部存在最小值, 故  $x = y = \sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}$  就是使造价最小的取值, 此时高为  $\sqrt[3]{\frac{aV^2}{2b}}$ 。

所以, 排污无盖的长方体的长、宽、高分别为  $\sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}$ 、 $\sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}$ 、 $\sqrt[3]{\frac{aV^2}{2b}}$  时, 工程造价最低。--- (7 分)

55. 设平面图形 D 由曲线  $y = e^x$ , 直线  $y = e$  及 y 轴所围成. 求:

(1) 平面图形 D 的面积;

(2) 平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解: 平面图形 D 如图 07-2 所示: --- (1 分)

取  $x$  为积分变量, 且  $x \in [0, 1]$

(1) 平面图形 D 的面积为

$$S = \int_0^1 (e - e^x) dx \text{----- (3 分)}$$

$$= (ex - e^x) \Big|_0^1 = 1. \text{----- (4 分)}$$

(2) 平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所生成

旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^1 x[e - e^x] dx = 2\pi e \int_0^1 x dx - 2\pi \int_0^1 x e^x dx \\ &= 2\pi e \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - 2\pi \int_0^1 x de^x = \pi e - 2\pi x e^x \Big|_0^1 + 2\pi \int_0^1 e^x dx \\ &= \pi e - 2\pi e + 2\pi e^x \Big|_0^1 = \pi(e - 2). \text{----- (7 分)} \end{aligned}$$

$$\text{或 } V_y = \pi \int_1^e (\ln y)^2 dy = \pi (\ln y)^2 y \Big|_1^e - \pi \int_1^e 2 \ln y dy$$

$$= \pi e - 2\pi \int_1^e \ln y dy = \pi e - 2\pi y \ln y \Big|_1^e + 2\pi \int_1^e dy$$

$$= \pi e - 2\pi e + 2\pi(e - 1) = \pi(e - 2).$$

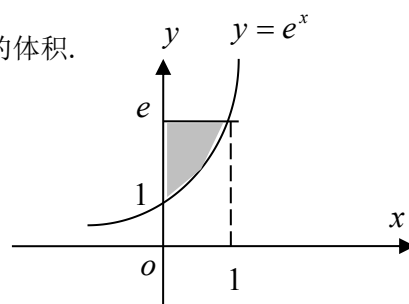


图 07-2

得分	评卷人

## 六、证明题 (6 分)

56. 若  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则存在两个常数  $m$  与  $M$ , 对于满足  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  的任意两点  $x_1, x_2$ , 证明恒有

$$m(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1).$$

证明: 因  $f'(x)$  在  $[x_1, x_2]$  有意义, 从而  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上连续且可导, 即  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上满足拉格朗日中值定理的条件, ----- (2 分)

故存在  $\xi \in (x_1, x_2)$ ，使得  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$ ，----- (3 分)

又因  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续，根据连续函数在闭区间上最值定理知， $f'(x)$  在  $[a, b]$  上既有最大值又有最小值，不妨设  $m, M$  分别是最小值和最大值，从而  $x \in (a, b)$  时，有  $m \leq f'(x) \leq M$ 。----- (5 分)

即  $m \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq M$ ，

故  $m(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1)$ 。---- (6 分)

# 河南省普通高等学校

## 选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试

### 高等数学 试卷

题号	一	二	三	四	五	总分	核分人
分数							

得分	评卷人

#### 一. 单项选择题 (每题 2 分, 共计 60 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 并将其代码写在题干后面的括号内. 不选、错选或多选者, 该题不得分.

1. 函数  $f(x) = \ln(1-x) + \sqrt{x+2}$  的定义域为 ( )

- A.  $[-2, -1]$       B.  $[-2, 1]$       C.  $[-2, 1)$       D.  $(-2, 1)$

解:  $\begin{cases} 1-x > 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x < 1 \Rightarrow C.$

2.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} =$  ( )

- A. 1      B. 0      C.  $\sqrt{2}$       D.  $\sqrt{3}$

解:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow D.$

3. 点  $x=0$  是函数  $y = \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{3^x} + 1}$  的 ( )

- A. 连续点      B. 跳跃间断点      C. 可去间断点      D. 第二类间断点

解:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{3^x} + 1} = \frac{-1}{1} = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{3^x} + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} \ln 3}{\frac{1}{3^x} \ln 3} = 1 \Rightarrow B.$

4. 下列极限存在的为 ( )

- A.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$       B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$       C.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$       D.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x - 3}$

解: 显然只有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$ , 其他三个都不存在, 应选 B.

5. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x^2)$  是比  $1-\cos x$  的 ( )

- A. 低阶无穷小      B. 高阶无穷小      C. 等价无穷小      D. 同阶但不等价无穷小

解:  $\ln(1+x^2) \sim x^2, 1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{2} \Rightarrow D$ .

6. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 1+(x+1)\sin \frac{1}{x+1}, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ \arctan x, & x > 0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  ( )

- A. 在  $x = -1$  处连续, 在  $x = 0$  处不连续    B. 在  $x = 0$  处连续, 在  $x = -1$  处不连续  
C. 在  $x = -1, 0$  处均连续    D. 在  $x = -1, 0$  处均不连续

解:  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1, f(-1) = 1 \Rightarrow f(x)$  在  $x = -1$  处连续;

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, f(0) = 1 \Rightarrow f(x)$  在  $x = 0$  处不连续; 应选 A.

7. 过曲线  $y = \arctan x + e^x$  上的点  $(0, 1)$  处的法线方程为 ( )

- A.  $2x - y + 1 = 0$     B.  $x - 2y + 2 = 0$   
C.  $2x - y - 1 = 0$     D.  $x + 2y - 2 = 0$

解:  $y' = \frac{1}{1+x^2} + e^x \Rightarrow f'(0) = 2 \Rightarrow k_{\text{法}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow D$ .

8. 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导,  $f(x) = f(0) - 3x + \alpha(x)$  且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = 0$ , 则  $f'(0) =$  ( )

- A. -1    B. 1    C. -3    D. 3

解:  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x + \alpha(x)}{x} = -3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = -3$ , 应选 C.

9. 若函数  $f(x) = (\ln x)^x (x > 1)$ , 则  $f'(x) =$  ( )

- A.  $(\ln x)^{x-1}$     B.  $(\ln x)^{x-1} + (\ln x)^x \ln(\ln x)$   
C.  $(\ln x)^x \ln(\ln x)$     D.  $x(\ln x)^x$

解:  $f(x) = (\ln x)^x = e^{x \ln(\ln x)} \Rightarrow y' = (\ln x)^x [x \ln(\ln x)]' = (\ln x)^{x-1} + (\ln x)^x \ln(\ln x)$ ,

应选 B.

10. 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$  确定, 则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} =$  ( )

- A. -2    B. -1    C.  $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$     D.  $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

解:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin t}{\cos t} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 t} \times \frac{1}{3 \cos^2 t \sin t} \Rightarrow \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3} \sqrt{2}$ , 应选 D.

11. 下列函数中, 在区间  $[-1, 1]$  上满足罗尔中值定理条件的是 ( )

- A.  $y = e^x$       B.  $y = \ln |x|$       C.  $y = 1 - x^2$       D.  $y = \frac{1}{x^2}$

解: 验证罗尔中值定理的条件, 只有  $y = 1 - x^2$  满足, 应选 C.

12. 曲线  $y = x^3 + 5x - 2$  的拐点是 ( )

- A.  $x = 0$       B.  $(0, -2)$       C. 无拐点      D.  $x = 0, y = -2$

解:  $y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, -2)$ , 应选 B.

13. 曲线  $y = \frac{1}{|x-1|}$  ( )

- A. 只有水平渐进线      B. 既有水平渐进线又有垂直渐进线  
C. 只有垂直渐进线      D. 既无水平渐进线又无垂直渐进线

解:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x-1|} = 0, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = \infty \Rightarrow B$ .

14. 如果  $f(x)$  的一个原函数是  $x \ln x$ , 那么  $\int x^2 f''(x) dx =$  ( )

- A.  $\ln x + C$       B.  $x^2 + C$   
C.  $x^3 \ln x + C$       D.  $C - x$

解:  $f(x) = (x \ln x)' = 1 + \ln x \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \int x^2 f''(x) dx = -\int dx = -x + C$ , 应选 D.

15.  $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$       B.  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x-3} \right| + C$   
C.  $\ln(x-3) - \ln(x-1) + C$       D.  $\ln(x-1) - \ln(x-3) + C$

解:  $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = \int \frac{dx}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right] dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$ , 应选 A.

16. 设  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$ , 则  $I$  的取值范围为 ( )

- A.  $0 \leq I \leq 1$       B.  $\frac{1}{2} \leq I \leq 1$       C.  $0 \leq I \leq \frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{1}{2} < I < 1$

解: 此题有问题, 定积分是一个常数, 有  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^4} \leq 1$ , 根据定积分的估值性质, 有

$\frac{1}{2} \leq I \leq 1$ , 但这个常数也在其它三个区间, 都应该正确, 但真题中答案是 B.

17. 下列广义积分收敛的是 ( )

- A.  $\int_1^{+\infty} x^3 dx$       B.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$       C.  $\int_1^{+\infty} \sqrt{x} dx$       D.  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

解: 显然应选 D.

18.  $\int_{-3}^3 |1-x| dx =$  ( )

- A.  $2 \int_0^3 |1-x| dx$       B.  $\int_{-3}^1 (x-1) dx + \int_1^3 (1-x) dx$   
C.  $\int_{-3}^1 (1-x) dx - \int_1^3 (x-1) dx$       D.  $\int_{-3}^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$

解:  $\int_{-3}^3 |1-x| dx = \int_{-3}^1 |1-x| dx + \int_1^3 |1-x| dx = \int_{-3}^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$ , 应选 D.

19. 若  $f(x)$  可导函数,  $f(x) > 0$ , 且满足  $f^2(x) = \ln^2 2 - 2 \int_0^x \frac{f(t) \sin t}{1 + \cos t} dt$ , 则  $f(x) =$  ( )

- A.  $\ln(1 + \cos x)$       B.  $-\ln(1 + \cos x) + C$   
C.  $-\ln(1 + \cos x)$       D.  $\ln(1 + \cos x) + C$

解: 对  $f^2(x) = \ln^2 2 - 2 \int_0^x \frac{f(t) \sin t}{1 + \cos t} dt$  两边求导有:  $2f(x)f'(x) = -2 \frac{f(x) \sin x}{1 + \cos x}$ ,

即有  $f'(x) = -\frac{\sin x}{1 + \cos x} \Rightarrow f(x) = -\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{d(1 + \cos x)}{1 + \cos x}$

$= \ln(1 + \cos x) + C$ , 还初始条件  $f(0) = \ln 2$ , 代入得  $C = 0$ , 应选 A.

20. 若函数  $f(x)$  满足  $f(x) = x + 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx$ , 则  $f(x) =$  ( )

- A.  $x - \frac{1}{3}$       B.  $x - \frac{1}{2}$       C.  $x + \frac{1}{2}$       D.  $x + \frac{1}{3}$

解: 令  $a = \int_{-1}^1 f(x) dx$ , 则  $f(x) = x + 1 - \frac{1}{2} a$ ,

故有  $a = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x + 1 - \frac{1}{2} a) dx = 2 - a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}$ , 应选 C.

21. 若  $I = \int_0^e x^3 f(x^2) dx$  则  $I =$  ( )

- A.  $\int_0^{e^2} xf(x) dx$       B.  $\int_0^e xf(x) dx$



C  $\frac{1}{2} \int_0^{e^2} xf(x)dx$

D  $\frac{1}{2} \int_0^e xf(x)dx$

解:  $I = \frac{1}{2} \int_0^e x^2 f(x^2) d(x^2) \stackrel{x^2=t}{=} \frac{1}{2} \int_0^{e^2} tf(t) d(t) = \frac{1}{2} \int_0^{e^2} xf(x) d(x)$ , 应选 C.

22. 直线  $\frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{9} = \frac{z}{1}$  与平面  $4x-3y+7z=5$  的位置关系为

A. 直线与平面斜交

B. 直线与平面垂直

C. 直线在平面内

D. 直线与平面平行

解:  $\vec{s} = \{5, 9, 1\}, \vec{n} = \{4, -3, 7\} \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{n}$ , 而点  $(-2, -4, 0)$  不在平面内, 为平行, 应选 D.

23.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} =$  ( )

A. 2

B. 3

C. 1

D. 不存在

解:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{x^2 + y^2} \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1) = 2$ , 应选 A.

24. 曲面  $z = x^2 + y^2$  在点  $(1, 2, 5)$  处切平面方程 ( )

A.  $2x + 4y - z = 5$

B.  $4x + 2y - z = 5$

C.  $x + 2y - 4z = 5$

D.  $2x - 4y + z = 5$

解: 令  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ ,  $F'_x(1, 2, 5) = 2, F'_y(1, 2, 5) = 4, F'_z(1, 2, 5) = -1 \Rightarrow$

$2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0 \Rightarrow 2x + 4y - z = 5$ , 也可以把点  $(1, 2, 5)$  代入方程验

证, 应选 A.

25. 设函数  $z = x^3y - xy^3$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$  ( )

A.  $6xy$

B.  $3x^2 - 3y^2$

C.  $-6xy$

D.  $3y^2 - 3x^2$

解:  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 - 3y^2$ , 应选 B.

26. 如果区域 D 被分成两个子区域  $D_1$  和  $D_2$  且  $\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = 5$ ,

$\iint_{D_2} f(x, y) dx dy = 1$ , 则  $\iint_D f(x, y) dx dy =$  ( )

- A. 5                      B. 4                      C. 6                      D. 1

解:根据二重积分的可加性,  $\iint_D f(x,y)dxdy = 6$ , 应选 C.

27. 如果  $L$  是摆线  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$  从点  $A(2\pi, 0)$  到点  $B(0, 0)$  的一段弧, 则

$$\int_L (x^2 y + 3xe^x)dx + \left(\frac{1}{3}x^3 - y \sin y\right)dy = \quad (\quad)$$

- A.  $e^{2\pi}(1-2\pi)-1$                       B.  $2[e^{2\pi}(1-2\pi)-1]$   
C.  $3[e^{2\pi}(1-2\pi)-1]$                       D.  $4[e^{2\pi}(1-2\pi)-1]$

解:有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = x^2 \Rightarrow$  此积分与路径无关, 取直线段  $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}$ ,  $x$  从  $2\pi$  变到  $0$ , 则

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 y + 3xe^x)dx + \left(\frac{1}{3}x^3 - y \sin y\right)dy &= \int_{2\pi}^0 3xe^x dx = 3 \int_{2\pi}^0 x de^x = 3(xe^x - e^x) \Big|_{2\pi}^0 \\ &= 3[e^{2\pi}(1-2\pi)-1], \text{ 应选 C.} \end{aligned}$$

28. 以通解为  $y = Ce^x$  ( $C$  为任意常数) 的微分方程为  $(\quad)$

- A.  $y' + y = 0$                       B.  $y' - y = 0$   
C.  $y'y = 1$                       D.  $y - y' + 1 = 0$

解:  $y = Ce^x \Rightarrow y' = Ce^x \Rightarrow y' - y = 0$ , 应选 B.

29. 微分方程  $y'' + y' = xe^{-x}$  的特解形式应设为  $y^* = (\quad)$

- A.  $x(ax+b)e^{-x}$                       B.  $ax+b$                       C.  $(ax+b)e^{-x}$                       D.  $x^2(ax+b)e^{-x}$

解:  $-1$  是单特征方程的根,  $x$  是一次多项式, 应设  $y^* = x(ax+b)e^{-x}$ , 应选 A.

30. 下列四个级数中, 发散的级数是  $(\quad)$

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$                       B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{1000n}$                       C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$                       D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

解: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{1000n}$  的一般项  $\frac{2n-3}{1000n}$  的极限为  $\frac{1}{500} \neq 0$ , 是发散的, 应选 B.

得分	评卷人

## 二、填空题 (每题 2 分, 共 30 分)

31.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的\_\_\_\_\_条件是  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ .

解: 显然为充要(充分且必要).

32. 函数  $y = x - \sin x$  在区间  $(0, 2\pi)$  单调\_\_\_\_\_, 其曲线在区间  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  内的凹凸性为\_\_\_\_\_的.

解:  $y' = 1 - \cos x > 0 \Rightarrow$  在  $(0, 2\pi)$  内单调增加,  $y'' = \sin x$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  内大于零, 应为凹的.

33. 设方程  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = a$  ( $a$  为常数) 所确定的隐函数  $z = f(x, y)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$ \_\_\_\_\_.

解:  $F = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - a \Rightarrow F'_z = 2z, F'_x = 6x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x}{z}$ .

34.  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} =$ \_\_\_\_\_.

解:  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2t - 2 \ln(1+t) + C$   
 $= 2\sqrt{x} - 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C$ .

35.  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{1 + \cos x} dx =$ \_\_\_\_\_.

解: 函数  $\frac{x}{1 + \cos x}$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$  是奇函数, 所以  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{1 + \cos x} dx = 0$ .

36. 在空间直角坐标系中, 以  $A(0, -4, 1)$ ,  $B(-1, -3, 1)$ ,  $C(2, -4, 0)$  为顶点的  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.

解:  $\overrightarrow{AB} = \{-1, 1, 0\}, \overrightarrow{AC} = \{2, 0, -1\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{-1, -1, -2\}$ , 所以

$\triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

37. 方程  $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = -2 \end{cases}$  在空间直角坐标下的图形为\_\_\_\_\_.

解: 是椭圆柱面与平面  $x = -2$  的交线, 为两条平行直线.

38. 函数  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  的驻点为\_\_\_\_\_.

解:  $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0), (1, 1).$

39. 若  $z = x^2y + e^{1-x}\sqrt{xy^3 + 2} \tan \sqrt{\frac{y}{x}}$ , 则  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} =$ \_\_\_\_\_.

解:  $f(x, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 0.$

40.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_x^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y}{y} dy =$ \_\_\_\_\_

解:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_x^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{y} \cos y dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^y \frac{1}{y} \cos y dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos y dy = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

41. 直角坐标系下的二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  (其中  $D$  为环域  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ ) 化为极坐标形式为\_\_\_\_\_.

解:  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

42. 以  $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$  为通解的二阶常系数线性齐次微分方程为\_\_\_\_\_.

解: 由  $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$  为通解知, 有二重特征根  $-3$ , 从而  $p = 6, q = 9$ , 微分方程为  $y'' + 6y' + 9y = 0.$

43. 等比级数  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0)$ , 当\_\_\_\_\_时级数收敛, 当\_\_\_\_\_时级数发散.

解: 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$  是等比级数, 当  $|q| < 1$  时, 级数收敛, 当  $|q| \geq 1$  时, 级数发散.

44. 函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$  展开为  $x$  的幂级数为\_\_\_\_\_

$$\begin{aligned}\text{解: } f(x) &= \frac{1}{x^2 - x - 2} = -\frac{1}{3} \left[ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right] = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{1+x} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}} \right] x^n, (-1 < x < 1).\end{aligned}$$

45.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-2}{n} \right)^n$  的敛散性为\_\_\_\_\_的级数.

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-2}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2} \times (-2)} = e^{-2} \neq 0, \text{ 级数发散.}$$

### 三、计算题 (每小题 5 分, 共 40 分)

得分
----

46. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3} \right)^{\frac{x^2 + 5}{2}}$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3} \right)^{\frac{x^2 + 5}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{3}{x^2}} \right)^{\frac{x^2 + 5}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{2}} \times \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\frac{5}{2}}}{\left( 1 - \frac{3}{x^2} \right)^{-\frac{x^2}{3} \times (-\frac{3}{2})} \times \left( 1 - \frac{3}{x^2} \right)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{2}} \times \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\frac{5}{2}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{x^2} \right)^{-\frac{x^2}{3} \times (-\frac{3}{2})} \times \left( 1 - \frac{3}{x^2} \right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{e}{e^{-\frac{3}{2}}} = e^{\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

47. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\int_0^{x^2} t^3 \sqrt{1+t^2} dt}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\int_0^{x^2} t^3 \sqrt{1+t^2} dt} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{x^2 \cdot 3 \sqrt{1+x^4} \times 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3 \sqrt{1+x^4}} = 2.$$

48. 已知  $y = \ln \sin(1-2x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sin(1-2x)} [\sin(1-2x)]' = \frac{\cos(1-2x)}{\sin(1-2x)} [1-2x]' = -2 \frac{\cos(1-2x)}{\sin(1-2x)} \\ &= -2 \cot(1-2x).\end{aligned}$$

49. 计算不定积分  $\int x \arctan x dx$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } \int x \arctan x dx &= \int \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C.\end{aligned}$$

50. 求函数  $z = e^x \cos(x+y)$  的全微分.

解: 利用微分的不变性,

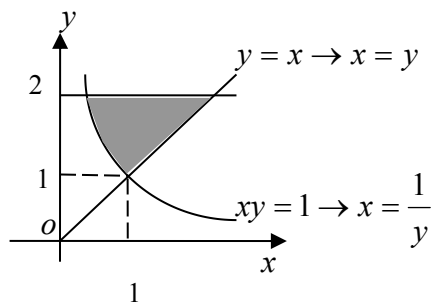
$$\begin{aligned}dz &= d[e^x \cos(x+y)] = e^x d \cos(x+y) + \cos(x+y) de^x \\ &= -e^x \sin(x+y) d(x+y) + \cos(x+y) e^x dx \\ &= -e^x \sin(x+y) [dx + dy] + \cos(x+y) e^x dx \\ &= e^x [\cos(x+y) - \sin(x+y)] dx - e^x \sin(x+y) dy.\end{aligned}$$

51. 计算  $\iint_D \frac{x}{y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  是由  $y=2, y=x, xy=1$  所围成的闭区域.

解: 积分区域  $D$  如图所示: 把区域看作 Y 型, 则有

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, \frac{1}{y} \leq x \leq y \right\},$$

$$\begin{aligned}\text{故 } \iint_D \frac{x}{y^2} dx dy &= \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y \frac{x}{y^2} dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy \int_{\frac{1}{y}}^y x dx = \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy \times \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{y}}^y \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[ 1 - \frac{1}{y^4} \right] dy = \frac{1}{2} \left( y + \frac{1}{3y^3} \right) \Big|_1^2 = \frac{17}{48}.\end{aligned}$$



52. 求微分方程  $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$  满足初始条件  $y(0) = -1$  的特解.

解: 这是一阶线性非齐次微分方程, 它对应的齐次微分方程  $y' + y \cos x = 0$  的通解为

$$y = Ce^{-\sin x}, \text{ 设 } y = C(x)e^{-\sin x} \text{ 是原方程解, 代入方程有 } C'(x)e^{-\sin x} = e^{-\sin x},$$

即有  $C'(x) = 1$ , 所以  $C(x) = x + C$ , 故原方程的通解为  $y = Ce^{-\sin x} + xe^{-\sin x}$ ,

把初始条件  $y(0) = -1$  代入得:  $C = -1$ , 故所求的特解为  $y = (x-1)e^{-\sin x}$ .

53. 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n$  的收敛半径及收敛区间 (考虑区间端点).

解：这是标准的不缺项的幂级数，收敛半径  $R = \frac{1}{\rho}$ ，

$$\text{而 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 3,$$

故收敛半径  $R = \frac{1}{3}$ 。

当  $x = \frac{1}{3}$  时，级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ ，这是调和级数，发散的；

当  $x = -\frac{1}{3}$  时，级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ ，这是交错级数，满足莱布尼兹定理的条件，收敛的；

所以级数的收敛域为  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 。

#### 四、应用题（每题 7 分，共计 14 分）

54. 过曲线  $y = x^2$  上一点  $M(1,1)$  作切线  $L$ ， $D$  是由曲线  $y = x^2$ ，切线  $L$  及  $x$  轴所围成的平面图形，求

(1) 平面图形  $D$  的面积；

(2) 该平面图形  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所成的旋转体的体积。

解：平面图形  $D$  如图所示：

因  $y' = 2x$ ，所以切线  $L$  的斜率  $k = y'(1) = 2$ ，

切线  $L$  的方程为  $y - 1 = 2(x - 1)$ ，即  $y = 2x - 1$

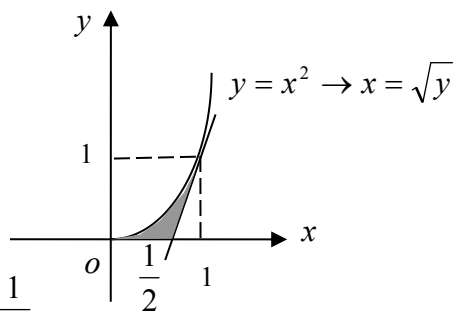
取  $x$  为积分变量，且  $x \in [0, 1]$ 。

(1) 平面图形  $D$  的面积为

$$S = \int_0^1 x^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 - \left. (x^2 - x) \right|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{12}.$$

(2) 平面图形  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所生成旋转体的体积为

$$V_x = \pi \int_0^1 x^4 dx - \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1)^2 dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^1 - \pi \left. \left( \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x \right) \right|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{30}.$$



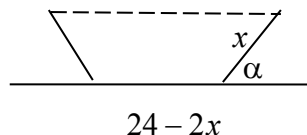
55. 一块铁皮宽为 24 厘米，把它的两边折上去，做成一正截面为等腰梯形的槽（如下图），要使梯形的面积  $A$  最大，求腰长  $x$  和它对底边的倾斜角  $\alpha$ 。

解：梯形截面的下底长为  $24 - 2x$ ，上底长为  $24 - 2x + 2x \cos \alpha$ ，高为  $x \sin \alpha$ ，所以截面面积为

$$A = \frac{1}{2} (24 - 2x + 2x \cos \alpha + 24 - 2x) \cdot x \sin \alpha,$$

$$(0 < x < 12, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

即  $A = 24x \sin \alpha - 2x^2 \sin \alpha + x^2 \sin \alpha \cos \alpha$ ，



$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x} = 24 \sin \alpha - 4x \sin \alpha + 2x \sin \alpha \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \alpha} = 24x \cos \alpha - 2x^2 \cos \alpha + x^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \end{cases} \quad \text{得唯一驻点} \begin{cases} x = 8 \\ \alpha = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

根据题意可知, 截面的面积最大值一定存在, 且在  $D: 0 < x < 12, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  内取得, 又函

数在  $D$  内只有一个可能的最值点, 因此可以断定  $x = 8, \alpha = \frac{\pi}{3}$  时, 截面的面积最大.

### 五、证明题 (6 分)

56. 证明方程  $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  在区间  $(e, e^3)$  内仅有一个实根.

证明: 构造函数  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ ,

即有  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = \ln x - \frac{x}{e} + 2\sqrt{2}$ , 显然函数  $f(x)$  在区间  $[e, e^3]$  连

续, 且有  $f(e) = 2\sqrt{2} > 0, f(e^3) = 3 - e^2 + 2\sqrt{2} < 6 - e^2 < 0$ , 由连续函数的零点定理知方

程  $f(x) = 0$  即  $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  在区间  $(e, e^3)$  有至少有一实数根.

另一方面,  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$  在区间  $(e, e^3)$  内恒小于零, 有方程  $f(x) = 0$ , 即

$\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  在区间  $(e, e^3)$  有至多有一实数根.

综上所述, 方程  $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  在区间  $(e, e^3)$  内仅有一个实根.



# 2013 年普通高等学校专升本招生考试试题

## 高等数学

一、单项选择题(每小题 2 分,共 60 分.在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案,用铅笔把答题卡上对应题目的标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.)

- 函数  $y = \frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{x-1}}$  的定义域是  
A.  $[0, 2]$  B.  $(1, +\infty)$  C.  $(1, 2]$  D.  $[1, 2]$
- 设  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , 那么  $f\{f[f(x)]\} =$   
A.  $\frac{1}{x}$  B.  $\frac{1}{x-1}$  C.  $\frac{1}{1-x^2}$  D.  $x$
- 函数  $y = \frac{1}{\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}$   $(-\infty < x < +\infty)$  是  
A. 偶函数 B. 奇函数 C. 非奇非偶函数 D. 既奇又偶函数
- 设  $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ , 则  $x=0$  是  $f(x)$  的  
A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点
- 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小量中与  $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$  等价的是  
A.  $x$  B.  $2x$  C.  $x^2$  D.  $2x^2$
- 已知  $f'(0) = a, g'(0) = b$ , 且  $f(0) = g(0)$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(-x)}{x} =$   
A.  $a-b$  B.  $2a+b$  C.  $a+b$  D.  $b-a$
- 曲线  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} (a > 0, b > 0)$ , 则  $t = \frac{\pi}{4}$  对应点处的法线斜率为  
A.  $\frac{b}{a}$  B.  $\frac{a}{b}$  C.  $-\frac{b}{a}$  D.  $-\frac{a}{b}$
- 设  $f'(x) = g(x)$ , 则  $df(\sin^2 x) =$   
A.  $2g(x) \sin x dx$  B.  $g(x) \sin 2x dx$  C.  $g(\sin 2x) dx$  D.  $g(\sin^2 x) \sin 2x dx$
- 设函数  $f(x)$  具有任意阶导数, 且  $f'(x) = [f(x)]^2$ , 则  $f^{(n)}(x) =$   
A.  $n! [f(x)]^{n+1}$  B.  $n [f(x)]^{n+1}$  C.  $(n+1) [f(x)]^{n+1}$  D.  $(n+1)! [f(x)]^{n+1}$
- 由方程  $xy = e^{x+y}$  确定的隐函数  $x(y)$  的导数  $\frac{dx}{dy} =$   
A.  $\frac{x(y-1)}{y(1-x)}$  B.  $\frac{y(x-1)}{x(1-y)}$  C.  $\frac{y(x+1)}{x(y-1)}$  D.  $\frac{x(y+1)}{y(x-1)}$
- 若  $f''(x) > 0 (0 < x < a)$ , 且  $f(0) = 0$ , 则下面成立的是  
A.  $f'(x) > 0$  B.  $f'(x)$  在  $[0, a]$  上单调增加  
C.  $f(x) > 0$  D.  $f(x)$  在  $[0, a]$  上单调增加
- 点  $(0, 1)$  是曲线  $y = x^3 + bx^2 + c$  的拐点, 则  
A.  $b = 0, c = 1$  B.  $b = -1, c = 0$  C.  $b = 1, c = 1$  D.  $b = -1, c = 1$
- 曲线  $y = 1 + \frac{x+2}{x^2-x-6}$  的垂直渐近线共有  
A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

14. 函数  $f(x) = e^x - e^{-x}$  的一个原函数是  
 A.  $F(x) = e^x - e^{-x}$  B.  $F(x) = e^x + e^{-x}$  C.  $F(x) = e^{-x} - e^x$  D.  $F(x) = -e^x - e^{-x}$  ( )
15. 若  $f'(x)$  连续, 则下列等式正确的是  
 A.  $\int df(x) = f(x)$  B.  $d \int f(x) dx = f(x)$  C.  $\int f'(x) dx = f(x)$  D.  $d \int f(x^2) dx = f(x^2) dx$  ( )
16.  $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx =$   
 A.  $\pi$  B.  $-\pi$  C. 1 D. 0 ( )
17. 设  $\int_1^{2+x} f(t) dt = xe^{2+x}$ , 则  $f'(x) =$   
 A.  $xe^x$  B.  $(x-1)e^x$  C.  $(x+2)e^x$  D.  $xe^{x+2}$  ( )
18. 下列广义积分收敛的是  
 A.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$  B.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  C.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  D.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x dx}{x}$  ( )
19. 微分方程  $(y')^2 + (y'')^2 y + y = 0$  的阶数是  
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 ( )
20. 微分方程  $dy - 2xy^2 dx = 0$  满足条件  $y(1) = -1$  的特解是  
 A.  $y = \frac{1}{x^2}$  B.  $y = -\frac{1}{x^2}$  C.  $y = x^2$  D.  $y = -x^2$  ( )
21. 下列各组角中, 可以作为向量的方向角的是  
 A.  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$  B.  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$  C.  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$  D.  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$  ( )
22. 直线  $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$  与平面  $\pi: 2x - 3y + z - 4 = 0$  的位置关系是  
 A.  $L$  在  $\pi$  上 B.  $L$  与  $\pi$  垂直相交  
 C.  $L$  与  $\pi$  平行 D.  $L$  与  $\pi$  相交, 但不垂直 ( )
23. 下列方程在空间直角坐标系中所表示的图形为柱面的是  
 A.  $\frac{x^2}{7} + \frac{z^2}{3} = y^2$  B.  $z - 1 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$   
 C.  $\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9}$  D.  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  ( )
24.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} =$   
 A. 0 B. 1 C.  $-\frac{1}{4}$  D. 不存在 ( )
25. 设  $z = f(x^2 - y^2, 2x + 3y)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial y} =$   
 A.  $2yf'_1 + 3f'_2$  B.  $-2yf'_1 + 3f'_2$  C.  $2xf'_1 + 2f'_2$  D.  $2xf'_1 - 2f'_2$  ( )
26. 设  $I = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x, y) dy + \int_2^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy$ , 则交换积分次序后,  $I$  可以化为  
 A.  $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$  B.  $\int_0^2 dy \int_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dx$   
 C.  $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dx$  D.  $\int_0^2 dy \int_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{2}} f(x, y) dx$  ( )
27. 积分  $\int_0^1 dx \int_1^2 x^2 y dy =$   
 A. 2 B.  $\frac{1}{3}$  C.  $\frac{1}{2}$  D. 0 ( )
28. 设  $L$  是抛物线  $x = y^2$  上从  $O(0, 0)$  到  $A(1, 1)$  的一段弧, 则曲线积分  $\int_L 2xy dx + x^2 dy =$  ( )



A. 0

B. 2

C. 4

29. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$  的收敛区间为

A. (0, 1)

B.  $(-\infty, +\infty)$ C.  $(-1, 1)$ D.  $(-1, 0)$ 

30. 下列级数收敛的是

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 

## 二、填空题(每小题 2 分, 共 20 分)

31. 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  有定义是极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的\_\_\_\_\_条件.32. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{px} = e^{-2}$ , 则  $p =$ \_\_\_\_\_.33. 函数  $f(x) = \begin{cases} e^{ax} - a, & x \leq 0, \\ a \cos 2x + x, & x > 0 \end{cases}$  是连续函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.34. 设函数  $f\left(\frac{1}{x^2}\right) = x^4$ , 则  $f'(x) =$ \_\_\_\_\_.35. 不定积分  $\int \frac{2 + \cos x}{2x + \sin x} dx =$ \_\_\_\_\_.36. 向量  $a = \{1, 0, 1\}$  与向量  $b = \{-1, 1, 0\}$  的夹角是\_\_\_\_\_.37. 微分方程  $y' + y - x = 0$  的通解是\_\_\_\_\_.38. 设方程  $x + 2y + z - 2xyz = 0$  所确定的隐函数为  $z = z(x, y)$ , 则  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=1}} =$ \_\_\_\_\_.39. 曲面  $z = x^2 + y^2$  在点  $(1, 2, 5)$  处的切平面方程是\_\_\_\_\_.40. 将  $f(x) = \frac{1}{x}$  展开成  $(x-4)$  的幂级数是\_\_\_\_\_.

## 三、计算题(每小题 5 分, 共 50 分)

41.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$ .42. 已知函数  $x = x(y)$  由方程  $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  所确定, 求  $\frac{dx}{dy}$ .43. 求不定积分  $\int \arctan \sqrt{x} dx$ .44. 设  $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \leq 0, \\ e^x, & x > 0, \end{cases}$  求  $\int_1^3 f(x-2) dx$ .45. 求微分方程  $2y'' + y' - y = 3e^x$  的通解.46. 设  $u = x^2 + \sin 2y + e^{yz}$ , 求全微分  $du$ .47. 一平面过点  $(1, 0, -1)$  且平行于向量  $a = \{2, 1, -1\}$  和  $b = \{1, -1, 2\}$ , 求此平面的方程.48. 计算  $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y = 1, y = x, y = 2, x = 0$  所围成的闭区域.49. 计算积分  $\int_L (x^2 + 2xy - y^2 + 10) dx + (x^2 - 2xy - y^2 + 15) dy$ , 其中  $L$  为曲线  $y = \cos x$  上从点  $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  到点 $B\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  的一段弧.50. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+1)}$  的收敛域.

## 四、应用题(每小题 6 分, 共 12 分)

51. 某房地产公司有 50 套公寓要出租, 当月租金定为 2000 元时, 公寓会全部租出去, 当月租金每增加 100 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 200 元的维修费, 试问租金定为多少可获得最大收入? 最大收入是多少?

52. 曲线  $y = x^3 (x \geq 0)$ , 直线  $x + y = 2$  以及  $y$  轴围成一平面图形  $D$ , 试求平面图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

## 五、证明题(8分)

53. 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(x) < 1$ , 证明: 方程  $2x - \int_0^x f(t) dt = 1$  在区间  $(0, 1)$  内有且仅有一个实根.

## 参考答案及精析

## 一、单项选择题(每小题 2 分, 共 60 分)

1. [答案] C

【精析】为使函数有意义, 须有  $\begin{cases} -1 \leq 1-x \leq 1, \\ x-1 > 0, \end{cases}$  即  $1 < x \leq 2$ , 故函数的定义域为  $(1, 2]$ .

2. [答案] D

【精析】由  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $f[f(x)] = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = -\frac{1-x}{x}$ ,  $f\{f[f(x)]\} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = x$ , 故选 D.

3. [答案] B

【精析】令  $f(x) = \frac{1}{\ln(\sqrt{1-x^2}-x)}$ , 则

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{\ln(\sqrt{1+x^2}+x)} = \frac{1}{\ln\left(\frac{(\sqrt{1+x^2})^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)} \\ &= \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)} = -\frac{1}{\ln(\sqrt{1+x^2}-x)} \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

即  $y = f(x)$  为奇函数.

4. [答案] B

【精析】因  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 = 2$ , 故  $x = 0$  是  $f(x)$  的可去间断点.

5. [答案] A

【精析】由选项可设与  $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$  等价的无穷小量为  $ax^b$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{ax^b} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{ax^b(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{ax^b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{ax^b} \cdot \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{ax^b} = 1, \end{aligned}$$

则  $a = 1, b = 1$ , 故选 A.

6. [答案] C

$$\begin{aligned} \text{【精析】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(-x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x-0} + \frac{g(-x) - g(0)}{-x-0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(-x) - g(0)}{-x-0} \\ &= f'(0) + g'(0) = a + b, \end{aligned}$$

故选 C.

7. [答案] B

【精析】  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t$ , 故  $t = \frac{\pi}{4}$  对应点处的法线斜率为  $\frac{a}{b}$ , 故选 B.



8. [答案] D

【精析】  $df(\sin^2 x) = [f(\sin^2 x)]' dx = f'(\sin x) \cdot 2 \sin x \cos x dx$ , 因为  $f'(x) = g(x)$ , 故  $df(\sin^2 x) = g(\sin^2 x) \sin 2x dx$ , 故选 D 正确。

9. [答案] A

【精析】 因为  $f'(x) = [f(x)]^2$ , 所以

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2f(x)f'(x) = 2[f(x)]^3, \\ f'''(x) &= 2 \times 3[f(x)]^2 \cdot f'(x) = 2 \times 3[f(x)]^4, \\ f^{(4)}(x) &= 2 \times 3 \times 4[f(x)]^3 \cdot f'(x) = 4![f(x)]^5, \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= n![f(x)]^{n+1}, \end{aligned}$$

故选 A.

10. [答案] A

【精析】 方程两边对  $y$  求导, 其中  $x$  看作  $y$  的函数,  $x'y + x = e^{x+y} \cdot (x' + 1)$ , 所以  $x' = \frac{dx}{dy} = \frac{x - e^{x+y}}{e^{x+y} - y} = \frac{x - xy}{xy - y} =$

$\frac{x(y-1)}{y(1-x)}$ , 故选 A.

11. [答案] B

【精析】  $f''(x) > 0$  只能说明  $f'(x)$  是  $[0, a]$  上的增函数, 而 A、C、D 中结论无法得到.

12. [答案] A

【精析】  $y' = 3x^2 + 2bx$ ,  $y'' = 6x + 2b$ , 当  $x = 0$  时,  $y'' = 2b = 0$ , 则  $b = 0$ , 又曲线过点  $(0, 1)$ , 即  $c = 1$ , 本题选 A.

13. [答案] A

【精析】  $y = 1 + \frac{x+2}{x^2-x-6} = 1 + \frac{x+2}{(x+2)(x-3)}$ , 显然  $x = -2$  为可去间断点,

$\lim_{x \rightarrow 3} y = \infty$ , 故  $x = 3$  为曲线的垂直渐近线, 本题选 A.

14. [答案] B

【精析】  $\int f(x) dx = \int (e^x - e^{-x}) dx = \int e^x dx + \int e^{-x} d(-x) = e^x + e^{-x} + C$ , 结合选项可知 B 正确.

15. [答案] D

【精析】  $\int df(x) = f(x) + C$ , A 错,  $d \int f(x) dx = f(x) dx$ , B 错,  $\int f'(x) dx = f(x) + C$ , C 错, D 正确.

16. [答案] D

【精析】 由于  $y = x^2 \sin x$  为  $[-\pi, \pi]$  上的奇函数, 故  $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx = 0$ .

17. [答案] A

【精析】 方程两边对  $x$  求导, 得  $f(2+x) = e^{2+x} + xe^{2+x}$ , 所以  $f(x) = e^x + (x-2)e^x$ ,  $f'(x) = e^x + e^x + (x-2)e^x = xe^x$ .

18. [答案] C

【精析】  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty}$  发散,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_1^{+\infty}$  发散,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1$  收敛,  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x dx}{x} = \int_1^{+\infty} \ln^3 x d(\ln x)$   
 $= \frac{1}{4} \ln^4 x \Big|_1^{+\infty}$  发散, 故选 C.

19. [答案] B

【精析】 微分方程的阶数为方程中最高阶导数的阶数, 故选 B.

20. [答案] B

【精析】 对微分方程分离变量, 得  $\frac{dy}{y^2} = 2x dx$ , 两边积分, 得  $-\frac{1}{y} = x^2 + C$ , 代入  $y(1) = -1$ , 得  $C = 0$ , 故方程的特解为  $y = -\frac{1}{x^2}$ .

21. [答案] C

【精析】 向量的方向角须满足  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , 由此可知只有 C 满足.

22. [答案] B

【精析】 由于直线的方向向量与平面的法向量平行, 故  $L$  与  $\pi$  垂直相交.

23. [答案] D

【精析】 D 中, 曲面在  $xOy$  平面上的投影为圆, 故 D 为柱面, 其他均不是.

24. [答案] C

【精析】  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(2 - \sqrt{xy+4})(2 + \sqrt{xy+4})}{xy(2 + \sqrt{xy+4})}$   
 $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{4 - xy - 4}{xy(2 + \sqrt{xy+4})} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} -\frac{1}{2 + \sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}.$

25. [答案] B

【精析】  $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \cdot (-2y) + f'_2 \cdot 3 = -2yf'_1 + 3f'_2$ , 故选 B.

26. [答案] A

【精析】 画出积分区域如图, 交换积分次序, 得

$$I = \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx.$$

27. [答案] C

【精析】  $\int_0^1 dx \int_1^2 x^2 y dy = \int_0^1 x^2 dx \int_1^2 y dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_1^2 \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$

28. [答案] D

【精析】  $\int_L 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 2y^2 \cdot y \cdot 2y dy + y^4 dy = 5 \int_0^1 y^4 dy = y^5 \Big|_0^1 = 1.$

29. [答案] C

【精析】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = 1$ , 故收敛半径  $R = 1$ , 收敛区间为  $(-1, 1)$ .

30. [答案] A

【精析】 A 为交错级数, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ,  $\frac{1}{n+1}$  单调递减, 故收敛,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,

故 B、C 均发散, D 中  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$ , 故发散.

## 二、填空题(每小题 2 分, 共 20 分)

31. [答案] 既不充分也不必要

【精析】  $f(x)$  在  $x_0$  有定义表明  $f(x)$  定义域中包含  $x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在等价于

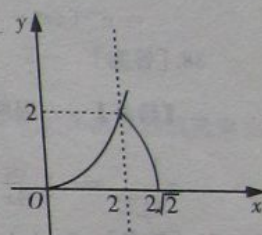
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ , 二者没有什么本质联系.

32. [答案]  $\frac{2}{3}$

【精析】  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{px} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3} \cdot -3p} = e^{-3p} = e^{-2}$ , 故  $p = \frac{2}{3}$ .

33. [答案]  $\frac{1}{2}$

【精析】  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{ax} - a) = 1 - a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a \cos 2x + x) = a$ , 由  $f(x)$  的连续性, 知  $1 - a = a$ , 即  $a$



第 26 题图



34. [答案]  $-\frac{2}{x^3}$

【精析】  $f\left(\frac{1}{x^3}\right) = x^4, f(x) = \frac{1}{x^2}, f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ .

35. [答案]  $\ln(2x + \sin x) + C$

【精析】  $\int \frac{2 + \cos x}{2x + \sin x} dx = \int \frac{1}{2x + \sin x} d(2x + \sin x) = \ln(2x + \sin x) + C$ .

36. [答案]  $\frac{2\pi}{3}$

【精析】  $\cos\langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}, \langle a, b \rangle = \frac{2\pi}{3}$ .

37. [答案]  $y = x + Ce^{-x} - 1$

【精析】 由一阶线性微分方程的通解公式得微分方程的通解为

$$y = e^{-\int dx} \left( \int x e^x dx + C \right) = e^{-x} (x e^x dx + C) \\ = e^{-x} (x e^x - e^x + C) = x + C e^{-x} - 1.$$

38. [答案]  $-5$

【精析】 方程两边对  $x$  求偏导, 得  $1 + \frac{\partial z}{\partial x} - 2y(z + x \frac{\partial z}{\partial x}) = 0$

$$z \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \frac{2yz - 1}{1 - 2xy} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -5.$$

39. [答案]  $2x + 4y - z = 5$

【精析】 令  $F = x^2 + y^2 - z, F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = -1$ , 故点  $(1, 2, 5)$  处的切平面法向量为  $(F_x|_{x=1}, F_y|_{y=2}, F_z|_{z=5})$

$= \{2, 4, -1\}$ , 所以切平面方程为

$$2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0, \text{ 即 } 2x + 4y - z = 5.$$

40. [答案]  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \cdot (x-4)^n$

【精析】  $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{4+x-4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-4}{4}}$ , 因为  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ , 所以  $f(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-4}{4}\right)^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \cdot (x-4)^n.$$

### 三、计算题 (每小题 5 分, 共 50 分)

41. 【精析】 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

42. 【精析】 方程  $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  两边对  $y$  求导, 得

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{x - yx'}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2xx' + 2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\text{即 } \frac{x - yx'}{x^2 + y^2} = \frac{xx' + y}{x^2 + y^2}, x - y = (x + y)x',$$

即  $\frac{dx}{dy} = x' = \frac{x-y}{x+y}$ .

43.【精析】 令  $\sqrt{x} = t$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ ,

$$\text{原式} = \int \arctan t \cdot dt^2 = t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

$$= t^2 \arctan t - \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt$$

$$= t^2 \arctan t - \int dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= t^2 \arctan t - t + \arctan t + C.$$

将  $t = \sqrt{x}$  代入得  $\int \arctan \sqrt{x} dx = x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C$ .

44.【精析】  $\int_1^3 f(x-2) dx = \int_1^3 f(x-2) d(x-2)$

$$= \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 (1+x^2) dx + \int_0^1 e^x dx$$

$$= \left( x + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^0 + e^x \Big|_0^1 = e + \frac{1}{3}.$$

45.【精析】 对应齐次方程的特征方程为  $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$ , 所以原方程对应齐次方程的通解为

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}, C_1, C_2 \text{ 为任意常数},$$

设  $y = Ae^x$  为方程特解, 代入方程得  $2Ae^x + Ae^x - Ae^x = 3e^x$ , 即  $A = \frac{3}{2}$ ,

故原方程的通解为  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2} e^x$ , 其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

46.【精析】  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + ye^{xy}, \frac{\partial u}{\partial y} = 2\cos 2y + xe^{xy}$ . 所以

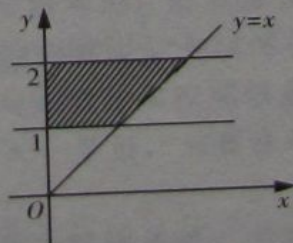
$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (2x + ye^{xy}) dx + (2\cos y + xe^{xy}) dy.$$

47.【精析】 设  $c = \{m, n, p\}$  为所求平面的一个法向量, 则

$$c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i - 5j - 3k, \text{ 即 } c = \{1, -5, -3\},$$

所以所求平面的方程为  $(x-1) - 5y - 3(z+1) = 0$ , 即  $x - 5y - 3z = 4$ .

48.【精析】 积分区域如图所示,



第 48 题图

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_1^2 dy \int_0^y e^{\frac{x}{y}} dx = \int_1^2 y e^{\frac{x}{y}} \Big|_0^y dy = \int_1^2 y(e-1) dy$$

$$= (e-1) \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_1^2$$

$$= \frac{3(e-1)}{2}.$$



49.【精析】 由于  $\frac{\partial(x^2 + 2xy - y^2 + 10)}{\partial y} = 2x - 2y = \frac{\partial(x^2 - 2xy - y^2 + 15)}{\partial x}$ , 所以所求积分与路径无关, 所以可以沿直

线  $y = 0$  积分,

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (x^2 + 10) dx = \left( \frac{1}{3} x^3 + 10x \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi^3}{12} - 10\pi.$$

50.【精析】 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2^n(n+1)}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+2)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)}{n+1} = 2$ , 所以幂级数的收敛半径为 2, 所以  $|x-1| < 2$ , 即

收敛区间为  $(-1, 3)$ , 当  $x = -1$  时, 原级数为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$  收敛, 当  $x = 3$  时, 原级数为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  发散, 故原幂级数的收敛域为  $[-1, 3)$ .

#### 四、应用题 (每小题 6 分, 共 12 分)

51.【精析】 设租金定为  $x$  元时对应的收入为  $y$  元, 则  $y = \left( 50 - \frac{x-2000}{100} \right)(x-200)$ , 即  $y = -\frac{x^2}{100} + 72x - 14000, x \geq 2000$ ,

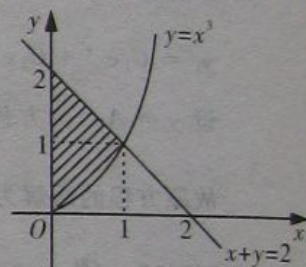
令  $y' = -\frac{x}{50} + 72 = 0$ , 得唯一驻点  $x = 3600$ ,

结合实际问题, 知当租金定为 3600 元时, 可获得最大收入, 最大收入为 115600 元.

52.【精析】 平面图形如图阴影部分所示,

所求体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi \cdot (\sqrt[3]{y})^2 dy + \int_1^2 \pi(2-y)^2 dy \\ &= \frac{3\pi}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^1 + \frac{\pi}{3} (y-2)^3 \Big|_1^2 = \frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = \frac{14}{15}\pi. \end{aligned}$$



第 52 题图

#### 五、证明题 (8 分)

53.【精析】 证明: 令  $F(x) = 2x - \int_0^x f(t) dt - 1$ , 则  $F(x)$  为  $[0, 1]$  上连续函数, 且  $F(0) = -1$

$$< 0, F(1) = 2 - \int_0^1 f(t) dt - 1 = 1 - \int_0^1 f(t) dt,$$

由于  $f(t) < 1$ , 则  $\int_0^1 f(t) dt < 1$ , 故  $F(1) > 0$ , 由零点存在定理,  $F(x)$  在  $(0, 1)$  内有实根, 又  $F'(x) = 2 - f(x) > 1 > 0$ ,  $F(x)$  在  $(0, 1)$  上单调增加,

因此方程  $2x - \int_0^x f(t) dt = 1$  在  $(0, 1)$  内有且仅有一个实根.