2011年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试
高等数学

题 号	一	二	三	四	五	总 分
分 值	60	20	50	12	8	150

注意事项：

答题前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

本试卷的试题答案必须答在答题卡上，答在试卷上无效。

一、选择题（每小题 2 分，共 60 分）

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

1．函数 $f(x)=\ln(2-x)+\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域为是

A．$(-\infty,2)$　　B．$(-2,+\infty)$　　C．$(-2,\ 2)$　　D．$(0,\ 2)$

【答案】C.

解：$\begin{cases}2-x>0\\ x+2>0\end{cases}\Rightarrow -2<x<2$，应选 C.

2．设 $f(x+1)=x^2+2x+2$，则　$f(x)=$

A．x^2　　B．x^2+1　　C．x^2-5x+6　　D．x^2-3x+2

【答案】B.

解：令 $x+1=t,$，则 $x=t-1$，有 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)+2=t^2+1$，

所以 $f(x)=x^2+1$，应选 B.

3．设函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 为奇函数，$g(x)(-\infty<x<+\infty)$ 为偶函数，则下列函数必为奇函数的是

A. $f(x)\cdot g(x)$　　B．$f[g(x)]$　　C．$g[f(x)]$　　D．$f(x)+g(x)$

【答案】A.

解：根据奇偶函数的结论：一奇一偶函数的乘积为奇函数，应选 A.

4. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$

A.-1　　B.1　　C.0　　D.不存在

【答案】C.

解：无穷小量与有界变量之积为无穷小量，因此 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，应选 C.

5．设 $f'(x)=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x-3h)}{h}=$

A．4　　B．5　　C．2　　D．1

【答案】B.

解：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x-3h)}{h}=5f'(x)=5$，应选 B.

6.当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量与 x 不等价的是

A. $x-\dfrac{x^2}{2}$　　B．e^x-2x^3-1

C. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$　　D. $\sin(x+\sin x)$

【答案】D.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x}=2$，应选 D.

7．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$ 则 $x=0$ 是

A.可去间断点　B.跳跃间断点　C.连续点　D.第二类间断点

【答案】B.

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$，应选 B.

8．函数 $\sin x$ 的三阶导数是

A．$\sin x$　B．$-\sin x$　C．$\cos x$　D．$-\cos x$

【答案】D.

解：$(\sin x)'''=-\cos x$，应选 D.

9．设 $x\in[-1,1]$，则 $\arcsin x+\arccos x=$

A．$\dfrac{\pi}{2}$　B．$\dfrac{\pi}{4}$　C．0　D．1

【答案】A.

解：$(\arcsin x+\arccos x)'=0\Rightarrow \arcsin x+\arccos x=C$

取 $x=0$，得 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$,应选 A.

10．若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$,则下列表述正确的是

A．x_0 是函数 $f(x)$ 的极大值点　B．x_0 是函数 $f(x)$ 的极小值点

C．x_0 不是函数 $f(x)$ 的极值点　D．无法确定 x_0 是否为函数 $f(x)$ 的极值点

【答案】B.

解：　根据取得极值的第二充分条件知，x_0 是函数 $f(x)$ 的极小值点，应选 B.

11．方程 $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$ 所表示曲线

A．仅有水平渐近线

B．仅有垂直渐近线

C．既有水平渐近线，又有垂直渐近线

D．既无水平渐近线，又无垂直渐近线

【答案】A.

解：$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arcsin\dfrac{1}{x}=0; x\to 0$ 时，$y=\arcsin\dfrac{1}{x}$ 无意义，因此仅有水平渐近线，应选 A.

12．$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx=$

A.0　B.2　C.-2　D.以上都不对

【答案】D.

解：$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx=\int_{0}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx+\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{x^2}dx$，是二个 q 广义积分都发散，因此原积分发散，应选 D.

13．方程 $\sin x+x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内根的个数是

A.0　B.1　C.2　D.3

【答案】B.

解:设函数 $f(x)=\sin x+x-1$，则 $f(0)=-1, f(1)=\sin 1$，$f'(x)=\cos x+1>0$，方程有唯一实根，应选 B.

14．若 $f(x)$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，则 $\int df(x)=$

A． $\sin x+C$　　B． $-\sin x+C$　　C． $-\cos x+C$　　D． $\cos x+C$

【答案】A.

解： $f'(x)=\cos x$，则 $\int df(x)=\int f'(x)dx=\int \cos xdx=\sin x+C$,应选 A.

15．设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\cos t}\sin tdt$，则 $F(x)$

A．为正常数　　B．为负常数　　C．恒为零　　D．不为常数

【答案】C.

解： $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\cos t}\sin tdt=-\int_x^{x+2\pi} e^{\cos t}d\cos t=-e^{\cos t}\Big|_x^{x+2\pi}=0$,应选 C.

16． $\frac{d}{dx}\int_x^b te^t dt=$

A. $-xe^x$　　B． xe^x　　C． e^b-e^x　　D． be^b-xe^x

【答案】A.

解： $\frac{d}{dx}\int_x^b te^t dt=-\frac{d}{dx}\int_b^x te^t dt=-xe^x$，应选 A.

17．由曲线 $y=\sin x(0\le x\le \pi)$ 与 x 轴所围成的区域的面积为

A．0　　B．2　　C． $\sqrt{2}$　　D． π

【答案】B.

解： $S=\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2$，应选 B.

18．关于二阶常微分方程的通解，下列说法正确的是

A．一定含有两个任意常数　　B．通解包含所有解

C．一个方程只有一个通解　　D．以上说法都不对

【答案】A.

解：根据微分方程通解的概念知，通解中一定含有两个任意常数，应选 A.

19．微分方程 $y'+3y=x$ 的通解是

A． $y=2x+Ce^{2x}+1$　　B． $y=xe^x+Cx-1$

C． $y=3x+Ce^x+\frac{1}{9}$　　D． $y=\frac{1}{3}x+Ce^{-3x}-\frac{1}{9}$

【答案】D.

解：这是一阶线性微分方程，代入通解公式有通解为

$y=e^{-\int 3dx}\left[\int xe^{\int 3dx}dx+C\right]=e^{-3x}\left[\int xe^{3x}dx+C\right]$，应选 D.

20．已知向量 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，则垂直于 $\vec{a}$ 且垂直于 y 轴的向量是

A． $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$　　B． $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$　　C． $\vec{i}+\vec{k}$　　D． $\vec{i}-\vec{k}$

【答案】D.

解： $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{k}$，应选 D.

21．对任意两个向量 $\vec{a}$， $\vec{b}$，下列等式不恒成立的是

A． $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　B． $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

C． $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$　　D． $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+(\vec{a}\times\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$

【答案】C.

解：因为 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$，应选 C.

22．直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$ 与平面 $x+y-z=2$ 的位置关系是

A．平行　　　　B．直线在平面内

C．垂直　　　　D．相交但不垂直

【答案】A.

解：　直线的方向向量与平面法向量相互垂直，则直线在平面内或直线平行于平面；而点（0,0,0）不在平面内，应有直线平行于平面，应选 A.

23．$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{y}{\sin xy}$ 的值为

A．0　　　B．1　　　C．$\frac{1}{2}$　　　D．不存在

【答案】C.

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{y}{\sin xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sin xy}\times\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$，应选 C.

24．函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 都存在是 $f(x,y)$ 在该点处连续的

A. 充要条件　　　　B. 必要非充分条件

C.充分非必要条件　　　　D.既非充分亦非必要条件

【答案】D.

解：偏导数都存在不一定连续，连续也不一定偏导数存在，应选 D.

25．函数 $z=\ln(1+\frac{x}{y})$ 在点（1,1）处的全微分 $dz|_{(1,1)}=$

A．0　　　B．$\frac{1}{2}(dx-dy)$　　　C．$dx-dy$　　　D．$\frac{1}{x+y}dx-\frac{1}{y}dy$

【答案】B.

解：$dz=d\ln\frac{x+y}{y}=d\ln(x+y)-d\ln y=\frac{dx+dy}{x+y}-\frac{dy}{y}$

$$=\frac{dx}{x+y}+(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{y})dy\Rightarrow dz|_{(1,1)}=\frac{1}{2}(dx-dy)$$，应选 B.

26．设 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y}}3x^2y^2\mathrm{d}x$，则交换积分次序后

A．$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x}}3x^2y^2\mathrm{d}y$　　　　B．$\int_0^{\sqrt{1-y}}\mathrm{d}x\int_0^1 3x^2y^2\mathrm{d}y$

C．$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2}3x^2y^2\mathrm{d}y$　　　　D．$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1+x^2}3x^2y^2\mathrm{d}y$

【答案】C.

解：$\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,0\le x\le\sqrt{1-y}\right\}=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1-x^2\right\}$，

应选 C.

27．设 L 为三个顶点分别为 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 0)$ 和 $(0,\ 1)$ 的三角形区域的边界，L 的方向为顺时针方向，则 $\oint_L(3x-y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=$

A.0　　　B.1　　　C.2　　　D.-1

【答案】D.

解：因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\frac{\partial Q}{\partial x}=1$，则

$$\oint_L(3x-y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=-\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=-2\iint\limits_D dxdy=-2S_{\Delta}=-1$$,应选 D.

28．$D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le\dfrac{\pi}{4},-1\le y\le 1\right\}$, 则 $\iint\limits_D y\cos(2xy)dxdy=$

A. $-\dfrac{1}{2}$　　　B.0　　　C. $\dfrac{1}{4}$　　　D. $\dfrac{1}{2}$

【答案】B.

解： 根据二重积分的对称性可知，此积分值为零，应选 B.

29．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散，则下列表述必正确的是

A． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散　　　B． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散

C． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 发散　　　D． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 发散

【答案】C.

解：A、B、D 都可以举出反例，对于 C,利用反证法，假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛，可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛，矛盾，应选 C.

30．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则此级数在 $x=4$ 处

A. 发散　　B. 条件收敛　　C. 绝对收敛　　D. 收敛性不确定

【答案】C.

解:令 $x-2=t$，化为级数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ 在 $t=-4$ 处收敛，问 $t=2$ 处是否收敛的问题，根据阿贝尔定理绝对收敛，应选 C.

二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

31. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$__________.

解： $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-1}=e^{-1}$.

32.设 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x_0)=3$时， $f'(-x_0)=$________.

解： $f(-x)=-f(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)\Rightarrow f'(-x_0)=3$.

33.曲线 $y=\ln x$ 上点（1,0）处的切线方程为_____________.

解： $y'=\dfrac{1}{x}\Rightarrow k=1$，所以切线方程为 $y=x-1$.

34. $\displaystyle\int\frac{1}{x(x-1)}dx=$________.

解： $\displaystyle\int\frac{1}{x(x-1)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\ln|x-1|+\ln|x|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$.

35.以 $C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$ 为通解的二阶常系数齐次线性微分方程为______________.

解： $C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$ 为通解说明特征方程有两个相等实根-2，所以 $p=4,q=4$，故二阶常系数齐次线性微分方程为 $y''+4y'+4y=0$.

36.点（1,2,3）关于 y 轴的对称点为_____ .

解：根据关于 y 轴的对称点的特点知，所求对称点为（-1，2，-3）.

37.函数 $z=e^{x+y}$ 在点（0,0）处得全微分 $dz\big|_{(0,0)}=$_________ .

解：$dz=e^{x+y}(dx+dy)\Rightarrow dz\big|_{(0,0)}=dx+dy$.

38.由 $x+y+xy=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=1$ 处得导数为___________.

解：$dx+dy+xdy+ydx=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1-y}{1+x}$，

当 $x=1$ 时，$y=0$，所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{1}{2}$.

39.函数 $z=x^2+y^2$ 在点（1,2）处沿从点（1,2）到点（2,2+$\sqrt{3}$）方向的方向导数等于______.

解：从点（1,2）到点（2,2+$\sqrt{3}$）方向向量为 $\vec{s}=\{1,\sqrt{3}\}$，单位化后为 $\vec{s}^0=\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$，

则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,2)}=f_x(1,2)\cos\alpha+f(1,2)\sin\beta=2\times\dfrac{1}{2}+4\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}$.

40.幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$ 的收敛区间为___________ .

解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，所以收敛区间为（-1,1）。

说明：教材不同给收敛区间定义不同，有些书中收敛区间就是开区间；有些书中收敛区间与收敛域是一致.此题，收敛域为 $[-1,1)$.答案提出的是 $[-1,1)$.但本人认为填（-1,1）也应该正确。

三、计算题（每小题 5 分，共 50 分）

41．用夹逼准则求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$ 的值.

解：因为 $\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{n}{n^2+k}\le\dfrac{n}{n^2+1},k=1,2,\cdots n,$----------2 分

所以 $\dfrac{n^2}{n^2+n}\le\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{n^2}{n^2+1}$ ------3 分

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=1$--------------------------4 分

由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=1$------5 分

对照：

42．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2},x\ne0\\0,\qquad x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导性.

解：因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$-----4 分

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$-------5 分

43．求不定积分 $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$.

解：$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{1}{(e^x)^2+1}de^x$ ----2 分

$\overset{e^x=u}{===} \int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u + C$ -------4 分

$= \arctan e^x + C$ -----------5 分

44．求定积分 $\int_0^1 xe^x dx$.

解：$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 xde^x$ ------------2 分

$= xe^x\big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$ ------4 分

$= e - e^x\big|_0^1 = e-(e-1) = 1$-----5 分

45．求微分方程 $y''+3y'+2y=e^x$ 的通解

解：　这是二阶常系数非齐次线性微分方程，它的特征方程为 $r^2+3r+2=0$，有两个特征根 $r_1=-1, r_2=-2$，从而对应的齐次方程通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ ------3 分，

设非齐次线性方程的一个特解为 $y^*=ae^x$，代入原方程有

$ae^x+3ae^x+2ae^x=e^x$，解得 $a=\frac{1}{6}$ ------------------4 分

故原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{6}e^x$，其中 C_1, C_2 是两个任意常数。

-----5 分

46．设 $z=\varphi\left(x+y, x^2\right)$，且 φ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：因为 $z=\varphi\left(x+y, x^2\right)$，且 φ 具有二阶连续偏导数，

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1\frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \varphi_2\frac{d(x^2)}{dx} = \varphi_1 + 2x\varphi_2$ -------2 分

从而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial(\varphi_1+2x\varphi_2)}{\partial y} = \varphi_{11}\frac{\partial(x+y)}{\partial y} + 2x\varphi_{21}\frac{\partial(x+y)}{\partial y}$ ------4 分

$= \varphi_{11} + 2x\varphi_{21}$ ------5 分

47．求曲面 $e^2 - z + xy=3$ 在点（2,1,0）处的切平面方程.

解：构造函数 $F(x,y,z)=e^z - z + xy - 3$，------1 分

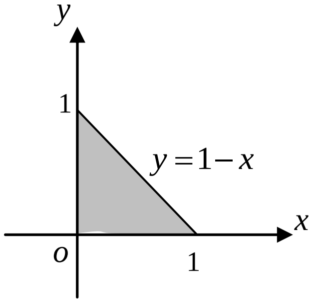
则 $F_x(x,y,z)=y, F_y(x,y,z)=x, F_z(x,y,z)=e^z-1$------2 分

所以 $F_x(2,1,0)=1, F_y(2,1,0)=2, F_z(2,1,0)=0$，------3 分

故曲面在点（2,1,0 处法向量为 $\vec{n}=\{1,2,0\}$.-------4 分

所以所求的切平面为 $(x-2)+2(y-1)=0$，即 $x+2y-4=0$-----5 分

48.求二重积分 $\iint\limits_{D} e^{x+y}d\sigma$，其中 D 是由直线 $x+y=1$ 和两条坐标轴所围城的闭区域。



解：积分区域如图所示，看作 X 型有

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$，---2 分

故 $\iint\limits_{D} e^{x+y} d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{x+y} dy$ ---3 分

$= \int_0^1 e^{x+y}\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 (e-e^x)dx = (ex-e^x)\Big|_0^1 = 1$.--5 分

49．计算 $\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz$, L 是从点 $A(1,1,1)$ 到点 $B(1,1,4)$ 的直线段.

解： L 参数方程为 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1+3t \end{cases}$ t 从 0 变到 1，------3 分

所以 $\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz = \int_0^1 d(1+3t) = 3$ -----5 分

50.将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 展开成 $(x+1)$ 的幂级数.

解：令 $x+1=t$ ，则 $x=t-1$，有 $f(x)=\dfrac{1}{(t-1)^2}$ ------1 分

而 $f(x)=\dfrac{1}{(t-1)^2}=\left(\dfrac{1}{1-t}\right)'$ ------2 分

因为 $\dfrac{1}{1-t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$,$(-1<x<1)$，-------3 分

所以 $f(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$ $(-1<t<1)$ ------4 分

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x+1)^{n-1}, x\in(-2,0)$ -----5 分

四、应用题（每小题 6 分，共 12 分）

51.求点（0,1）到抛物线 $y=x^2$ 上的点的距离的平方的最小值.

解法一：设点（0.1）到抛物线 $y=x^2$ 上的点 (x,y) 的距离为 d ，

则 $d^2 = x^2+(y-1)^2 = y+(y-1)^2 = y^2-y+1$，------3 分

令 $(d^2)'_y = 2y-1=0$，得唯一可能的极值点 $y=\dfrac{1}{2}$，-----4 分

而 $(d^2)''_y = 2>0$，故 $y=\dfrac{1}{2}$ 就是使 d^2 取得极小值的点，即为最小值点，----5 分

最小值为 $d^2\Big|_{y=\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{4}$ --------6 分

解法二：设点（0.1）到抛物线 $y=x^2$ 上的点 (x,y) 的距离为 d ，

则 $d^2 = x^2+(y-1)^2, y=x^2$，------1 分

构造函数 $F(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+\lambda(x^2-y)$ -----2 分

令 $\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2x+2\lambda x=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=2(y-1)-\lambda=0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=x^2-y=0 \end{cases}$，--------4 分

得可能最小值点$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$ -------5 分

由于$d^2\big|_{(0,0)}=1,\ d^2\big|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{4},d^2\big|_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{4}$

所以点（0，1）到抛物线$y=x^2$上的点的距离的平方的最小值为$\frac{3}{4}$.-----6 分

52.求几何体$x^2+y^2+4z^4\le 4$的体积.

解法一：易知几何体$x^2+y^2+4z^4\le 4$是由yoz平面图形$y^2+4z^4=4$绕z轴旋转所得的几何体，-------2 分

由方程$y^2+4z^4=4$可知，$-2\le y\le 2,-1\le z\le -1$，看作 Z 型图形绕$z$旋转，-----3 分

则有所求几何体的体积为

$$V=\pi\int_{-1}^{1}f^2(z)dz=\pi\int_{-1}^{1}y^2dz=4\pi\int_{-1}^{1}\left(1-z^4\right)dz=\frac{32}{5}\pi\text{。}\text{-----6 分}$$

解法二：易见几何体$x^2+y^2+4z^4\le 4$被平面$z=h(-1\le h\le 1$所截而得的截面是一个半径为$2\sqrt{1-h^4}$的圆面，其面积为$S_h=4\pi\left(1-h^4\right)$，　--------3 分

因此几何体的体积为$V=\int_{-1}^{1}S_z\ dz=\int_{-1}^{1}4\pi\left(1-z^4\right)dz=\frac{32}{5}\pi$ ------6 分

解法三：令$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}$，则几何体可看作以$D$为底，以$z=f(x,y)$为曲顶的曲顶柱体体积的 2 倍，--------1 分

故所求几何体$x^2+y^2+4z^4\le 4$的体积为

$$V=2\iint\limits_D\sqrt[4]{1-\frac{x^2+y^2}{4}}d\sigma \qquad \text{-----2 分}$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\sqrt[4]{1-\frac{r^2}{4}}d\sigma \qquad \text{------4 分}$$

$$=-\pi\sqrt{2}\int_0^2\sqrt[4]{4-r^2}d(4-r^2)$$

$$=-\pi\sqrt{2}\left(\frac{4}{5}(4-r^2)^{\frac{5}{4}}\right)\Bigg|_0^2=\frac{32}{5}\pi \qquad \text{-----6 分}$$

五、证明题（8 分）

53.设函数$f(x)$，$g(x)$均在闭区间$[a,b]$上连续，$f(a)=g(b),f(b)=g(a)$，且$f(a)\ne f(b)$，证明存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=g(\xi)$.

证明：　令$F(x)=f(x)-g(x)$，则函数$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，----2 分

由$f(a)=g(b),f(b)=g(a)$，$f(a)\ne f(b)$可得

$F(a)=f(a)-g(a)=f(a)-f(b)\ne 0$，-------3 分

$F(b)=f(b)-g(b)=f(b)-f(a)\ne 0$，-------4 分

显然$F(a)\cdot F(b)<0$-------6 分

于是由连续函数的零点定理知，$\xi\in\{a,b\},\ F(\xi)=0$，即$f(\xi)=g(\xi)$.-----8 分