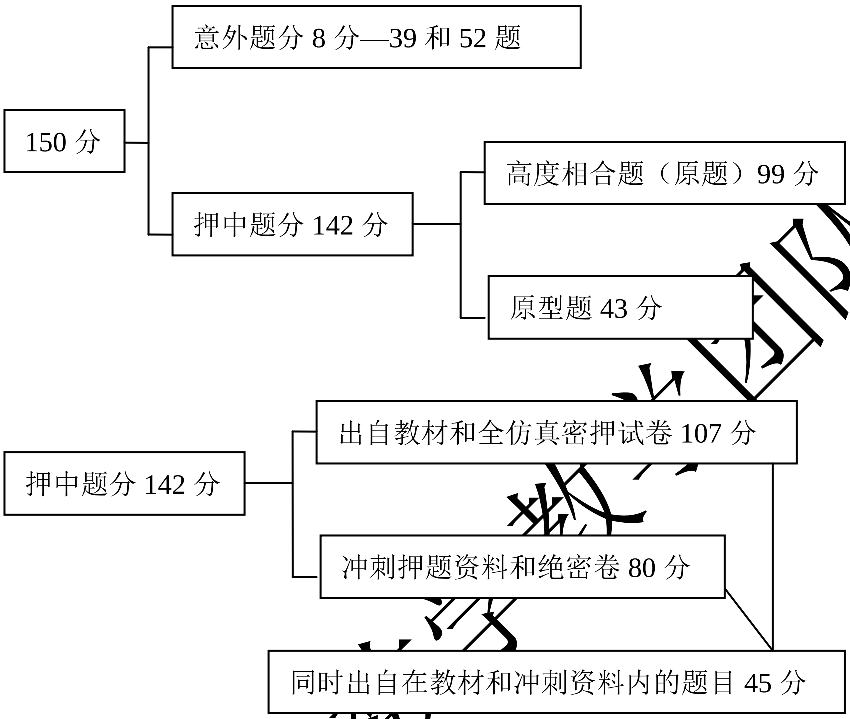
写在前面话：

云飞专升本《高等数学》培训成功押中 **142** 分，具体可见下面点点对照，其中红色是高度相合的试题（原题）；蓝色是原型题。具体分值为



这次我们在冲刺押题中押中了 **80** 分的题目，远远超过我们承诺的 **30** 分，个别学生错误认为上冲刺班就要押中所有题，发短信侮辱我们，其他培训结构穿马甲诋毁我们，我们将保留追求法律责任权力。

云飞专升本始终是考生最信赖的朋友；关心，关注学生的成绩是我们发展根本；履行承诺是我们责任。如果你认为没有达到我们承诺，可以凭手续到我们办公地点核实。

实力不是靠说的，是靠做的。今年云飞专升本在英语、管理学和数学都有骄人的业绩，请核查。

下面是高等数学试卷的评价：

今年数学试卷水平不高，主要体现在：

1.重点内容没有重点考。一元函数微积分只有 **76** 分，而且出题简单。如：不定积分和定积分计算过于简单。

2.非重点内容考的很多。除一元函数微积分（前 6 章内容）外考了 74 分（后 6 章），如曲线积分就出了两个题目 7 分，还有二元函数微分出题太多，而且考查点重复。

3.专科没有涉及内容出现在试卷中。如方向导数和应用题 2。

4.有两处出现重复考的内容。

5.三个本科教师出题，不了解专科情况，缺乏针对性，出题不认真。简单的题目都能做的，复杂题目学生很少完成 ，试卷缺乏区分度。

学生博弈的是谁做题错误率低。估计分数集中在 110 分左右。考满分学生很少，有可能不会出现。

2011 年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试
高等数学

题 号	一	二	三	四	五	总 分
分 值	60	20	50	12	8	150

注意事项：

答题前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

本试卷的试题答案必须答在答题卡上，答在试卷上无效。

一、选择题（每小题 2 分，共 60 分）

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

1．函数 $f(x)=\ln(2-x)+\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域为是

A．$(-\infty,2)$ B．$(-2,+\infty)$ C．$(-2,\ 2)$ D．$(0,\ 2)$

【答案】C.

解：$\begin{cases}2-x>0\\x+2>0\end{cases}\Rightarrow -2<x<2$，应选 C.

对照：

（1）考前绝密卷一第 1 题

1. 设函数 $f(x)=\arcsin(1-x)+\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$，则 $f(x)$ 的定义域为

A. $[-1,1]$ B. $(-1,1)$ C. $[0,2]$ D. $[0,1)$

（2）考前绝密卷四第 1 题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\lg(3+x)$ 的定义域为 （ ）

A. $x \neq 0$ 且 $x \neq -3$　B. $x > 0$　C. $x > -3$　D. $x > -3$ 且 $x \neq 0$

（3）冲刺押题讲稿第 1 题

1. 函数 $y = \sqrt{\ln\left(\frac{5x - x^2}{4}\right)}$ 的定义域为

A. $[1,\ 4]$　B. $(1,\ 4)$　C. $(1,\ 4]$　D. $[1,\ 4)$

2．设 $f(x+1) = x^2 + 2x + 2$，则 $f(x) =$

A． x^2　B． $x^2 + 1$　C． $x^2 - 5x + 6$　D． $x^2 - 3x + 2$

【答案】B.

解：令 $x+1 = t,$，则 $x = t - 1$，有 $f(t) = (t-1)^2 + 2(t-1) + 2 = t^2 + 1$，

所以 $f(x) = x^2 + 1$，应选 B.

对照：

（1）冲刺押题讲稿第 6 题

6. 设 $f(e^x + 1) = 2x - 3$，则 $f(x) =$ ________ .

（2）考前绝密套卷一第 31 题

31. 已知 $f(x+2) = x^2 - 1$，则 $f(-2x+1) =$ ________

（3）教材第 5 页例 11

例 11 设 $f(x+1) = \frac{2+x}{2x-1}$，求 $f(x)$.

3．设函数 $f(x)(-\infty < x < +\infty)$ 为奇函数，$g(x)(-\infty < x < +\infty)$ 为偶函数，则下列函数必为奇函数的是

A. $f(x)\cdot g(x)$　B. $f[g(x)]$　C. $g[f(x)]$　D. $f(x) + g(x)$

【答案】A.

解：根据奇偶函数的结论：一奇一偶函数的乘积为奇函数，应选 A.

对照：

（1）冲刺押题讲稿 9 题

9. 若 $f(x)$ 的定义域是关于原点对称，则下列函数的图像一定关于 y 轴对称的是

A. $f(x)$　B. $f(-x)$　C. $f(x) + f(-x)$　D. $f(x) - f(-x)$

（2）教材第 10 页第 19 题

19. 设函数 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，其定义域均为 D,证明 $f(x)\cdot g(x)$ 是奇函数.

(3) 全仿真密押试卷八第 2 题

2. 函数 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则复合函数 $f[g(x)]$ 为　（　）

A. 奇函数　B. 偶函数　C. 非奇非偶函数　D. 既奇又偶函数

4. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} =$

A.-1　B.1　C.0　D.不存在

【答案】C.

解：无穷小量与有界变量之积为无穷小量，因此 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$，应选 C.

对照：

（1）考前绝密卷题第 2 题

2. $\lim\limits_{x\to 0} x\arctan\frac{1}{x}=$

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $-\frac{\pi}{2}$

（2）教材第 18 页例 14（2）小题

例 14（2）求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

5．设 $f'(x)=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-3h)}{h}=$

A． 4　　B． 5　　C． 2　　D． 1

【答案】B.

解：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-3h)}{h}=5f'(x)=5$，应选 B.

对照：

（1）冲刺押题讲稿第 38 题

38. 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，且取得极大值，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+3h)}{2h}=$

A. 0　　B. 1　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

（2）考前绝密卷二第 6 题

6. 已知 $f'(a)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+2x)-f(a-x)}{x}=$

A. $f'(a)$　　B. $2f'(a)$　　C. $3f'(a)$　　D. 0

（3）考前绝密卷三第 5 题

5. 若 $f'(x_0)=-3$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-3h)}{h}=$（　　）

A. -3　　B. -6　　C. -9　　D. -12

6.当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量与 x 不等价的是

A. $x-\frac{x^2}{2}$　　B. e^x-2x^3-1

C. $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$　　D. $\sin(x+\sin x)$

【答案】D.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x+\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}=2$，应选 D.

对照：

（1）冲刺押题讲稿第 14 题

14. 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1+\sqrt{x})$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

（2）全仿真密押卷一第 4 题

4. 当 $n\to\infty$ 时，与 $\sin\dfrac{1}{n}$ 不等价的无穷小量是

A. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$　　B. $\dfrac{1}{1+n}$　　C. $e^{\frac{1}{n}}-1$　　D. $\dfrac{1}{1+n^2}$

7．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 则 $x=0$ 是

A.可去间断点　　B.跳跃间断点　　C.连续点　　D.第二类间断点

【答案】B.

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$，应选 B.

对照：

（1）考前绝密卷一第 4 题

4. $x=0$ 是 $y=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ 函数的

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 连续点　　D. 第二类间断点

8．函数 $\sin x$ 的三阶导数是

A． $\sin x$　　B． $-\sin x$　　C． $\cos x$　　D． $-\cos x$

【答案】D.

解：$(\sin x)'''=-\cos x$，应选 D.

对照：

（1）冲刺押题讲稿第 43 题

43.已知 $f^{(n-2)}(x)=e^{x^2}$，则 $f^{(n)}(x)=$________.

9．设 $x\in[-1,1]$，则 $\arcsin x+\arccos x=$

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C． 0　　D． 1

【答案】A.

解：$(\arcsin x+\arccos x)'=0\Rightarrow\arcsin x+\arccos x=C$

取 $x=0$，得 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$,应选 A.

对照：

（1）教材第 88 页第 11 题

11.证明 $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$

10．若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$,则下列表述正确的是

A． x_0 是函数 $f(x)$ 的极大值点　　B． x_0 是函数 $f(x)$ 的极小值点

C．x_0 不是函数 $f(x)$ 的极值点　　D. 无法确定 x_0 是否为函数 $f(x)$ 的极值点

【答案】B.

解：　根据取得极值的第二充分条件知，x_0 是函数 $f(x)$ 的极小值点，应选 B.

对照：

（1）冲刺押题讲稿 82 题

82. 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+xf'(x)=1+e^x$，若 $f'(x_0)=0$，则有

A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

11．方程 $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$ 所表示曲线

A．仅有水平渐近线

B．仅有垂直渐近线

C．既有水平渐近线，又有垂直渐近线

D．既无水平渐近线，又无垂直渐近线

【答案】A.

解：$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arcsin\dfrac{1}{x}=0; x\to 0$ 时，$y=\arcsin\dfrac{1}{x}$ 无意义，因此仅有水平渐近线，应选 A.

对照：

（1）冲刺讲稿第 85 题

85. 函数 $y=\arctan\dfrac{1}{x}$

A．仅有水平渐近线　　B．仅有垂直渐近线

C．既有水平渐近线，又有垂直渐近线　　D．既无水平渐近线，又无垂直渐近线

12．$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx=$

A.0　　B.2　　C.-2　　D.以上都不对

【答案】D.

解：$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx=\int_{0}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx+\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{x^2}dx$，是二个 q 广义积分都发散，因此原积分发散，应选 D.

对照：

（1）教材第 199 页例 18 题

例 18 讨论广义积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx$ 的收敛性.

（1）全仿真密押试卷五第 9 题

9. 广义积分 $\int_{2}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+x-2}$　　（　　）

A. 收敛于 $\frac{2}{3}\ln 2$　　B. 收敛于 $\frac{3}{2}\ln 2$

C. 收敛于 $\frac{1}{3}\ln 2$　　D. 发散

（2）全仿真密押试卷十第 17 题

17. 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+1}$ 的值　（　　）

A. π　B. $-\pi$　C. $\frac{\pi}{2}$　D. 发散

13．方程 $\sin x+x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内根的个数是

A.0　B.1　C.2　D.3

【答案】B.

解:设函数 $f(x)=\sin x+x-1$，则 $f(0)=-1, f(1)=\sin 1, f'(x)=\cos x+1>0$，方程有唯一实根，应选 B.

对照：

（1）全仿真密押卷十一第 5 题

5. 下列方程在（0，1）至少有一实根的为　（　　）

A. $\sin x+x+1=0$　B. $x^5-3x=1$

C. $x^3-4x^2+1=0$　D. $\arctan x+x^2+1=0$

14．若 $f(x)$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，则 $\int df(x)=$

A．$\sin x+C$　B．$-\sin x+C$　C．$-\cos x+C$　D．$\cos x+C$

【答案】A.

解：$f'(x)=\cos x$，则 $\int df(x)=\int f'(x)dx=\int\cos xdx=\sin x+C$，应选 A.

对照：

（1）教材 162 页第 20 题

20．若 $\cos x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int df(x)=$

A．$-\sin x+C$　B．$\sin x+C$　C．$-\cos x+C$　D．$\cos x+C$

15．设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\cos t}\sin t dt$，则 $F(x)$

A．为正常数　B．为负常数　C．恒为零　D．不为常数

【答案】C.

解：$F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\cos t}\sin t dt=-\int_x^{x+2\pi}e^{\cos t}d\cos t=-e^{\cos t}\Big|_x^{x+2\pi}=0$，应选 C.

对照：

（1）教材第 212 页第 6 题

6.定积分 $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}dx$

A．大于 0　B．小于 0　C．等于 0　D．不能判定

16．$\frac{d}{dx}\int_x^b te^t dt=$

A. $-xe^x$　　B. xe^x　　C. e^b-e^x　　D. be^b-xe^x

【答案】A.

解：$\frac{d}{dx}\int_x^b te^t dt=-\frac{d}{dx}\int_b^x te^t dt=-xe^x$，应选 A.

对照：
（1）冲刺押题讲稿第 114 题

114. $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^1\sqrt{1+t^2}dt=$ ________ .

17．由曲线 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴所围成的区域的面积为

A．0　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．π

【答案】B.

解：$S=\int_0^\pi \sin x dx=-\cos x\big|_0^\pi=2$，应选 B.

对照：
教材第 232 页第 18 题

18. 求曲线 $y=\sin x$ 与 x 轴所围成的平面区域在 $[0,\pi]$ 内的面积，并求此平面区域分别绕 x,y 轴旋转一周所成旋转体的体积.

18．关于二阶常微分方程的通解，下列说法正确的是

A．一定含有两个任意常数　　B．通解包含所有解

C．一个方程只有一个通解　　D．以上说法都不对

【答案】A.

解：根据微分方程通解的概念知，通解中一定含有两个任意常数，应选 A.

对照：
（1）冲刺押题讲稿第 224 题

224. 方程 $\frac{d^3y}{dx^3}+e^x\frac{d^2y}{dx}+e^{2x}=1$ 的通解中应包含的任意独立常数的个数为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 0

19．微分方程 $y'+3y=x$ 的通解是

A．$y=2x+Ce^{2x}+1$　　B．$y=xe^x+Cx-1$

C．$y=3x+Ce^x+\frac{1}{9}$　　D．$y=\frac{1}{3}x+Ce^{-3x}-\frac{1}{9}$

【答案】D.

解：这是一阶线性微分方程，代入通解公式有通解为

$$y=e^{-\int 3dx}\left[\int xe^{\int 3dx}dx+C\right]=e^{-3x}\left[\int xe^{3x}dx+C\right]$$，应选 D.

对照：
（1）教材第 438 页例 9（3）

例 9 求下列微分方程的通解

（3）$y'+2y=4x$

（2）全仿真密押试卷六第 53 题

53.求微分方程 $y'=y+x$ 的通解

20．已知向量$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，则垂直于$\vec{a}$且垂直于$y$轴的向量是

A．$\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$　B．$\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$　C．$\vec{i}+\vec{k}$　D．$\vec{i}-\vec{k}$

【答案】D.

解：$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{k}$，应选 D.

对照：

（1）教材第 242 页例 12

例 12 求垂直于向量$\vec{a}=\{2,2,1\},\vec{b}=\{4,5,3\}$的单位向量

(2) 教材第 242 页例 11

例 11 设$\vec{\alpha}=3\vec{i}-\vec{k},\vec{\beta}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$，则$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=$______。

21．对任意两个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，下列等式不恒成立的是

A．$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　B．$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

C．$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$　D．$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+(\vec{a}\times\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$

【答案】C.

解：因为$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$，应选 C.

对照：

（1）教材 278 页第 6 题

6．对于非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，下列诸等式中不成立的是

A．$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$　B．$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$

C．$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　D．$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$

（2）冲刺押题讲稿第 136 题

136. 下列结论正确的是

A. 若$|\vec{a}|>|\vec{b}|$，则有$\vec{a}>\vec{b}$

B. 若非零向量$\vec{a}=\{x,y,z\}$与xOy面垂直，则$z=0$

C. 若$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{a}\neq 0$，则$\vec{b}=\vec{c}$

D.对于两个向量总有$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

22．直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$与平面$x+y-z=2$的位置关系是

A．平行　B．直线在平面内

C．垂直　D．相交但不垂直

【答案】A.

解：直线的方向向量与平面法向量相互垂直，则直线在平面内或直线平行于平面；而点（0,0,0）不在平面内，应有直线平行于平面，应选 A.

对照：

（1）考前绝密卷四第 15 题

15. 直线$\frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{7}=\frac{z}{-3}$与平面$4x-2y-2z-3=0$的位置关系是(　　)

A. 直线与平面垂直　　B. 直线与平面平行　　C. 直线与平面斜交　　D. 直线在平面内

（2）冲刺押题讲稿第 147 题

147. 直线 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的位置关系式

A.垂直　　B.相交但不垂直　　C.直线在平面内　　D.平行

23. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{y}{\sin xy}$ 的值为

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 不存在

【答案】C.

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{y}{\sin xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sin xy}\times\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$，应选 C.

对照：

（1）全仿真密押卷十一第 21 题

21. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin x^2 y}{xy}=$　　（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

（2）教材 284 页例 3（3）

例 3 求下列函数的极限

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$

24. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 都存在是 $f(x,y)$ 在该点处连续的

A. 充要条件　　B. 必要非充分条件

C.充分非必要条件　　D.既非充分亦非必要条件

【答案】D.

解：偏导数都存在不一定连续，连续也不一定偏导数存在，应选 D.

对照：

（1）押题讲稿第 184 题

184. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在是它在该点处可微的

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

（2）押题讲稿第 186 题

186. 下列结论正确的是

A. 二元函数的极值点一定是驻点

B. 多元函数的二阶混合偏导与求导顺序无关

C. 具有一阶连续的偏导数函数一定可微

D. 二元函数偏导数存在一定连续

（3）考前绝密卷四第 19 题

19. $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数都存在，则　（　　）

A. $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微　　B. $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续

C. $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续　　D. 和在 (x_0,y_0) 处是否连续无关

25．函数 $z=\ln(1+\dfrac{x}{y})$ 在点（1,1）处的全微分 $dz|_{(1,1)}=$

A．0　　B．$\dfrac{1}{2}(dx-dy)$　　C．$dx-dy$　　D．$\dfrac{1}{x+y}dx-\dfrac{1}{y}dy$

【答案】B.

解：$dz=d\ln\dfrac{x+y}{y}=d\ln(x+y)-d\ln y=\dfrac{dx+dy}{x+y}-\dfrac{dy}{y}$

$=\dfrac{dx}{x+y}+(\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{y})dy\Rightarrow dz|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}(dx-dy)$，应选 B.

对照：

（1）冲刺讲稿第 165 题

165. 设 $z=xy+x^3$，则 $dz|_{\substack{x=1\\y=1}}$ 等于

A．$dx+4dy$　　B. $dx+dy$　　C. $4dx+dy$　　D. $3dx+dy$

（2）考前绝密卷二第 23 题

23. 设 $z=\ln(x^2+y^2)$，则 $dz|_{(1,1)}=$

A．$dx+dy$　　B．$2xdx+2ydy$

C．$2dx+2dy$　　D．$\dfrac{1}{2}dx+\dfrac{1}{x}dy$

26．设 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y}}3x^2y^2\mathrm{d}x$，则交换积分次序后

A．$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x}}3x^2y^2\mathrm{d}y$　　B．$\int_0^{\sqrt{1-y}}\mathrm{d}x\int_0^1 3x^2y^2\mathrm{d}y$

C．$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2}3x^2y^2\mathrm{d}y$　　D．$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1+x^2}3x^2y^2\mathrm{d}y$

【答案】C.

解：$\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,0\le x\le\sqrt{1-y}\right\}=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1-x^2\right\}$，

应选 C.

对照：

（1）冲刺押题讲稿的 197 题

197. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}f(x,y)dx=$______________.

（2）考前绝密卷三第 41 题

41.二重积分 $\int_0^1 dy\int_{y-1}^{1-y}f(x,y)dx$，变更积分次序后为____________________ .

27．设 L 为三个顶点分别为 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 0)$ 和 $(0,\ 1)$ 的三角形区域的边界，L 的

方向为顺时针方向，则$\oint_L (3x-y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=$

A.0　　B.1　　C.2　　D.-1

【答案】D.

解：因为$\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\frac{\partial Q}{\partial x}=1$，则

$$\oint_L (3x-y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=-2\iint_D dxdy=-2S_\Delta=-1,\text{应选 D.}$$

对照：

（1）冲刺押题讲稿第 206 题

206. 若 $f(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数，L 是以点（1, 1），(2, 2)，(1, 3）为顶点的三角形正向边界，则$\oint_L [3y+f_x'(x,y)]dx+f_y'(x,y)dy=$______.

（2）教材 379 页第 8 题

8．设 L 为以 $A(-1,\ 0)$，$B(-3,\ 2)$ 和 $C(3,\ 0)$ 三个顶点的三角形区域的边界，方向为 $ABCA$，则$\oint_L (3x-y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=$

A.-8　　B.0　　C.8　　D.20

（3）考前绝密卷二第 26 题

26. 设 L 是 $x^2+y^2=1$ 逆时针方向进行的简单闭曲线，则 $I=\oint_L ydx+xdy=$

A. 0　　B. -2π　　C. 2π　　D. π

28． $D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le\frac{\pi}{4},-1\le y\le 1\right\}$，则$\iint_D y\cos(2xy)dxdy=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B.0　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】B.

解： 根据二重积分的对称性可知，此积分值为零，应选 B.

对照：

（1）全仿真密押试卷 1 第 23 题

23．设 D 是由 $|x|=2,|y|=1$ 所围成的闭区域，则$\iint_D xy^2dxdy=$　　（　　）

A． $\frac{4}{3}$　　B． $\frac{8}{3}$　　C． $\frac{16}{3}$　　D．0

（2）冲刺押题讲稿第 192 题

192. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则$\iint_D xydxdy=$

A. 0　　B. $4\iint_{D_1} xydxdy$　　C. $2\iint_{D_1} xydxdy$　　D. $\iint_{D_1} xydxdy$

29. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散，则下列表述必正确的是

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 发散　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 发散

【答案】C.

解：A、B、D 都可以举出反例，对于 C,利用反证法，假设 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛，矛盾，应选 C.

对照：
（1）冲刺押题讲稿 208 题

208. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则级数

A. $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty}u_nu_{n+1}$ 收敛　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 收敛

（2）全仿真密押卷三第 28 题

28. 设 $a_n>0, n=1,2,\cdots$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 则下列结论正确是

A. $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛

30. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则此级数在 $x=4$ 处

A. 发散　　B. 条件收敛　　C. 绝对收敛　　D. 收敛性不确定

【答案】C.

解:令 $x-2=t$，化为级数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ 在 $t=-4$ 处收敛，问 $t=2$ 处是否收敛的问题，根据阿贝尔定理绝对收敛，应选 C.

对照：
（1）冲刺押题讲稿 212 题

212. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=6$ 处收敛，则该级数在 $x=-3$ 处

A. 发散　　B. 条件收敛　　C. 绝对收敛　　D. 敛散性不确定

（2）教材第 414 页选择第 2 题

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 在 $x=6$ 处收敛，则该级数在 $x=-1$ 处

A. 发散　　B. 条件收敛　　C. 绝对收敛　　D. 敛散性不确定

二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

31. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$________.

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-1}=e^{-1}$.

对照：

（1）全仿真密押卷九第 3 题

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ 的值为

A. e　　B. e^2　　C. e^3　　D. e^{-2}

（2）教材 46 页第 18 题

18. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=$______.

32. 设 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x_0)=3$ 时，$f'(-x_0)=$________.

解：$f(-x)=-f(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)\Rightarrow f'(-x_0)=3$.

对照：

（1）全仿真密押试卷十二第 7 题

7. 若 $f(x)$ 为可导的奇函数，则 $f'(x)$ 一定是　　（　　）

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 既奇又偶函数

（2）教材第 52 页例 9

例 9 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$.

33. 曲线 $y=\ln x$ 上点（1,0）处的切线方程为____________.

解：$y'=\frac{1}{x}\Rightarrow k=1$，所以切线方程为 $y=x-1$.

对照：

（1）冲刺押题讲稿第 56 题

56. 曲线 $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^4 \end{cases}$ 在点（0,1）处切线方程为______________.

（2）考前绝密卷四第 38 题

38. 曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点（1，1）的法线方程为 __________.

（3）教材 74 页第 10 题

10. 曲线 $y=\arctan x$ 在点 $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ 处的切线方程是____________.

34. $\int \frac{1}{x(x-1)}dx=$________.

解：$\int \frac{1}{x(x-1)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\ln|x-1|+\ln|x|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$.

对照：
（1）教材第 156 页第 34 题
34. $\int \frac{1}{(x-1)(x+4)}dx$

35.以 $C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$ 为通解的二阶常系数齐次线性微分方程为________.

解：$C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$ 为通解说明特征方程有两个相等实根-2，所以 $p=4,q=4$，故二阶常系数齐次线性微分方程为 $y''+4y'+4y=0$.

对照：
（1）冲刺押题讲稿第 237 题
237. 下列方程中，通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$ 的微分方程是

A. $y''+2y'+y=0$　　B. $y''+2y'+y=1$
C. $y''-2y'+y=0$　　D. $y''+2y'-y=0$

（2）考前绝密卷一第 40 题
40. 函数 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$ 是二阶常数齐次线性微分方程________的通解

36.点（1,2,3）关于 y 轴的对称点为________.

解：根据关于 y 轴的对称点的特点知，所求对称点为（-1，2，-3）.

对照：
（1）教材第 279 页第 16 题
16. 设点 $A(2,-1,3)$ 关于 yOz 平面的对称点为 $B(-2,y,3)$，则 $y=$______。
（2）教材第 260 页第 3 题
3. 已知直线 $l:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{1}$，直线外一点 $P(3,3,3,)$，则点 P 关于该直线 l 对称的点的坐标是

A. $(1,1,1)$　　B. $(1,-1,-3)$　　C. $(-3,-3,-3)$　　D. $(-1,1,3)$

37.函数 $z=e^{x+y}$ 在点（0,0）处得全微分 $dz|_{(0,0)}=$________.

解：$dz=e^{x+y}(dx+dy)\Rightarrow dz|_{(0,0)}=dx+dy$.

对照：此题与选择题 25 题考查内容重复，出题老师水平不高的表现.
（1）冲刺押题讲稿第 165 题
165. 设 $z=xy+x^3$，则 $dz|_{\substack{x=1\\y=1}}$ 等于

A. $dx+4dy$　　B. $dx+dy$　　C. $4dx+dy$　　D. $3dx+dy$

（2）考前绝密卷二第 23 题

23. 设 $z=\ln(x^2+y^2)$，则 $dz|_{(1,1)}=$

A. $dx+dy$　　B. $2xdx+2ydy$

C. $2dx+2dy$　　D. $\frac{1}{2}dx+\frac{1}{x}dy$

38.由 $x+y+xy=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=1$ 处得导数为__________.

解：$dx+dy+xdy+ydx=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-1-y}{1+x}$，

当 $x=1$ 时，$y=0$，所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)}=-\frac{1}{2}$.

对照：

（1）冲刺押题讲稿第 48 题

48.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=xe^y$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

（2）考前绝密卷四第 36 题

36. 设 $x^2y-e^{2x}=\sin y$, 则 $\frac{dy}{dx}=$________.

39.函数 $z=x^2+y^2$ 在点（1,2）处沿从点（1,2）到点（2,2+$\sqrt{3}$）方向的方向导数等于______.

解：从点（1,2）到点（2,2+$\sqrt{3}$）方向向量为 $\vec{s}=\{1,\sqrt{3}\}$，单位化后为 $\vec{s}^0=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$，

则 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,2)}=f_x(1,2)\cos\alpha+f_y(1,2)\sin\beta=2\times\frac{1}{2}+4\frac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}$.

对照：此题超出了专科《高等数学》的范围，这是本科老师不了解专科教学的结果。

40.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 的收敛区间为__________ .

解：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，所以收敛区间为（-1,1）。

说明：教材不同给收敛区间定义不同，有些书中收敛区间就是开区间；有些书中收敛区间与收敛域是一致.此题，收敛域为 $[-1,1)$.答案提出的是 $[-1,1)$.但本人认为填（-1,1）也应该正确。

对照：

（1）冲刺押题讲稿第 215 题

215. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+4}x^n$ 收敛区间（讨论端点）.

（2）教材第 415 页第 12 题（1）小题

12.求下列幂级数的收敛班级和收敛域

（1）$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

三、计算题（每小题 5 分，共 50 分）

41．用夹逼准则求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+...+\frac{n}{n^2+n}\right)$ 的值.

解：因为 $\frac{n}{n^2+n}\le\frac{n}{n^2+k}\le\frac{n}{n^2+1}, k=1,2,\cdots n,$ ----------2 分

所以 $\frac{n^2}{n^2+n}\le\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+...+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{n^2}{n^2+1}$ ------3 分

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$ -------------------------4 分

由夹逼准则知，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+...+\frac{n}{n^2+n}\right)=1$ -----5 分

对照：

（1）教材第 13 页例 2

例 2 证明：$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

42．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导性.

解：因为 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0$ -----4 分

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$ -------5 分

对照

（1）教材 50 页第 11 行例如

例如：$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

（2）教材 52 页例 12

例 12 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

43．求不定积分 $\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$.

解：$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{1}{(e^x)^2+1}de^x$ ----2 分

$\overset{e^x=u}{===} \int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u + C$ -------4 分

$= \arctan e^x + C$ -----------5 分

对照：此题太简单了，是最基本的题目，应该在选择或填空中出。
（1）教材第 143 页例 10

例 10 求 $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

（2）冲刺讲稿第 98 题、第 105 题

98. $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx =$ ______________.

105. 求 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$.

44. 求定积分 $\int_0^1 xe^x dx$.

解：$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 xde^x$ ------------2 分

$= xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$ ------4 分

$= e - e^x\Big|_0^1 = e-(e-1) = 1$ -----5 分

对照：此题太简单了，是最基本的题目，应该在选择或填空中出。
（1）教材 192 页第 18 题第 1 小题

18．求下列定积分

（1）$\int_0^1 xe^x dx$

（2）教材 186 页例 33

例 33 计算 $\int_0^{\pi} x\sin xdx$

45. 求微分方程 $y''+3y'+2y=e^x$ 的通解

解：这是二阶常系数非齐次线性微分方程，它的特征方程为 $r^2+3r+2=0$，有两个特征根 $r_1=-1, r_2=-2$，从而对应的齐次方程通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ ------3 分，

设非齐次线性方程的一个特解为 $y^*=ae^x$，代入原方程有

$ae^x+3ae^x+2ae^x=e^x$，解得 $a=\frac{1}{6}$ -------------------4 分

故原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{6}e^x$，其中 C_1, C_2 是两个任意常数。

-----5 分

对照：
（1）教材第 448 页例 7 第（1）小题

例 7 求下列微分方程的通解

（1） $2y''+y'-y=2e^{x}$

（2）考前绝密卷四第 53 题

53． 求微分方程 $y''+y=\cos x$ 的通解

46．设 $z=\varphi\left(x+y,x^2\right)$，且 φ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：因为 $z=\varphi\left(x+y,x^2\right)$，且 φ 具有二阶连续偏导数，

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi_1\dfrac{\partial(x+y)}{\partial x}+\varphi_2\dfrac{d(x^2)}{dx}=\varphi_1+2x\varphi_2$ -------2 分

从而 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial(\varphi_1+2x\varphi_2)}{\partial y}=\varphi_{11}\dfrac{\partial(x+y)}{\partial y}+2x\varphi_{21}\dfrac{\partial(x+y)}{\partial y}$ -------4 分

$=\varphi_{11}+2x\varphi_{21}$ ------5 分

对照：专科中很少有含符合的二元函数求高阶偏导数。

（1）教材 304 页第 20 题

20.设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$， f,φ 具有二阶连续偏导，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______

（2）考前绝密卷三第 50 题

50. 设 $z=x^3+y^3-3xy^2$，求 dz 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

47．求曲面 $e^2-z+xy=3$ 在点(2,1,0)处的切平面方程.

解：构造函数 $F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$，------1 分

则 $F_x(x,y,z)=y, F_y(x,y,z)=x, F_z(x,y,z)=e^z-1$------2 分

所以 $F_x(2,1,0)=1, F_y(2,1,0)=2, F_z(2,1,0)=0$， ------3 分

故曲面在点(2,1,0)处法向量为 $\vec{n}=\{1,2,0\}$.--------4 分

所以所求的切平面为 $(x-2)+2(y-1)=0$，即 $x+2y-4=0$-----5 分

对照：考察内容与 46 题重复，都是二元函数有偏导数。

（1）教材 306 页 43 题

43. 求曲面 $e^2-z+xy=3$ 在点(2,1,0)处的切平面方程.和法线方程。

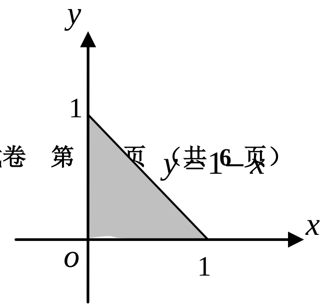
（2）冲刺押题讲稿第 174 题

174. 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $M(1,0,1)$ 处切平面方程为________________.

48.求二重积分 $\iint\limits_{D}e^{x+y}d\sigma$，其中 D 是由直线 $x+y=1$ 和两条坐标轴所围城的闭区域。

解：积分区域如图所示，看作 X 型有

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$，---2 分



故 $\iint\limits_{D} e^{x+y} d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{x+y} dy$ ---3 分

$= \int_0^1 e^{x+y}\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 (e - e^x) dx = (ex - e^x)\Big|_0^1 = 1$.--5 分

对照：此题比较简单，很多书都有这个基本题目。
（1）冲刺押题讲稿 193 题
193. 设区域 D 是由 x 轴，y 轴及直线 $x+y=1$ 围成的三角形区域，则 $\iint\limits_{D} yd\,xdy =$

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 0

49．计算 $\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz$, L 是从点 $A(1,1,1)$ 到点 $B(1,1,4)$ 的直线段.

解：L 参数方程为 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1+3t \end{cases}$ t 从 0 变到 1，------3 分

所以 $\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz = \int_0^1 d(1+3t) = 3$ ----5 分

对照：不是重点内容，出为计算题不妥。
（1）教材 373 页第 10 题的（3）小题
10.计算下列对坐标的曲线积分
（3）$\int_\Gamma xdx + ydy + (x+y-1)dz$，其中 Γ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线.

50.将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 展开成 $(x+1)$ 的幂级数.

解：令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，有 $f(x)=\frac{1}{(t-1)^2}$ ------1 分

而 $f(x)=\frac{1}{(t-1)^2}=\left(\frac{1}{1-t}\right)'$ -------2 分

因为 $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty} t^n$,$(-1<x<1)$，-------3 分

所以 $f(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$ $(-1<t<1)$------4 分

$= \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^{n-1}, x\in(-2,0)$ -----5 分

对照：
（1）教材第 414 页例 15

例 15 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

四、应用题（每小题 6 分，共 12 分）

51.求点（0,1）到抛物线 $y=x^2$ 上的点的距离的平方的最小值.

解法一：设点（0.1）到抛物线 $y=x^2$ 上的点 (x,y) 的距离为 d，

则 $d^2=x^2+(y-1)^2=y+(y-1)^2=y^2-y+1$，------3 分

令 $(d^2)'_y=2y-1=0$，得唯一可能的极值点 $y=\frac{1}{2}$，-----4 分

而 $(d^2)''_y=2>0$，故 $y=\frac{1}{2}$ 就是使 d^2 取得极小值的点，即为最小值点，-----5 分

最小值为 $d^2\big|_{y=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$--------6 分

解法二：设点（0.1）到抛物线 $y=x^2$ 上的点 (x,y) 的距离为 d，

则 $d^2=x^2+(y-1)^2, y=x^2$，------1 分

构造函数 $F(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+\lambda(x^2-y)$ -----2 分

令 $\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2x+2\lambda x=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=2(y-1)-\lambda=0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=x^2-y=0 \end{cases}$，--------4 分

得可能最小值点 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ -------5 分

由于 $d^2\big|_{(0,0)}=1, d^2\big|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{4}, d^2\big|_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{4}$

所以点（0，1）到抛物线 $y=x^2$ 上的点的距离的平方的最小值为 $\frac{3}{4}$.-----6 分

对照：此题就是一元函数最值的几何应用，也可以看作二元函数有条件的极值应用。在高中课本上二次函数的应用。

（1）全仿真密押试卷二第 46 题

46. 在 xy 面上有一点，使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 的距离平方和最小。

52.求几何体 $x^2+y^2+4z^4\le 4$ 的体积.

解法一：易知几何体 $x^2+y^2+4z^4\le 4$ 是由 yoz 平面图形 $y^2+4z^4=4$ 绕 z 轴旋转所得的几何体，-------2 分

由方程 $y^2+4z^4=4$ 可知，$-2\le y\le 2, -1\le z\le -1$，看作 Z 型图形绕 z 旋转，-----3 分

则有所求几何体的体积为

$$V=\pi\int_{-1}^{1}f^{2}(z)dz=\pi\int_{-1}^{1}y^{2}dz=4\pi\int_{-1}^{1}\left(1-z^{4}\right)dz=\frac{32}{5}\pi$$ 。-----6 分

解法二： 易见几何体 $x^2+y^2+4z^4\le 4$ 被平面 $z=h(-1\le h\le 1)$ 所截而得的截面是一个半径为 $2\sqrt{1-h^4}$ 的圆面，其面积为 $S_h=4\pi\left(1-h^4\right)$， --------3 分

因此几何体的体积为 $V=\int_{-1}^{1}S_z\ dz=\int_{-1}^{1}4\pi\left(1-z^4\right)dz=\frac{32}{5}\pi$ ------6 分

解法三：令 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}$，则几何体可看作以 D 为底，以 $z=f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体体积的 2 倍，--------1 分

故所求几何体 $x^2+y^2+4z^4\le 4$ 的体积为

$$V=2\iint_{D}\sqrt[4]{1-\frac{x^2+y^2}{4}}d\sigma$$ -----2 分

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\sqrt[4]{1-\frac{r^2}{4}}d\sigma$$ ------4 分

$$=-\pi\sqrt{2}\int_0^2\sqrt[4]{4-r^2}\,d(4-r^2)$$

$$=-\pi\sqrt{2}\left(\frac{4}{5}(4-r^2)^{\frac{5}{4}}\right)\Bigg|_0^2=\frac{32}{5}\pi$$ -----6 分

对照：这个题很意外，这个题设计的内容不是考察重点，说明出题老师太不了解专科学生的情况了。此题是综合题，可以看作定积分应用，也可以看作二重积分应用，平时学生和老师很少关注到这点。

我们教材也有个类似题目，教材 221 页例 9.

例 9 一平面经过半径 R 圆柱体的底圆中心，并与地面成角 α，计算该平面截圆柱体所得立体的体积。

五、证明题（8 分）

53.设函数 $f(x)$ 、$g(x)$ 均在闭区间 $[a,b]$ 上连续， $f(a)=g(b), f(b)=g(a)$，且 $f(a)\ne f(b)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=g(\xi)$.

证明： 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则函数 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，----2 分

由 $f(a)=g(b), f(b)=g(a)$， $f(a)\ne f(b)$ 可得

$F(a)=f(a)-g(a)=f(a)-f(b)\ne 0$，-------3 分

$F(b)=f(b)-g(b)=f(b)-f(a)\ne 0$，-------4 分

显然 $F(a)\cdot F(b)<0$-------6 分

于是由连续函数的零点定理知， $\xi\in\{a,b\}, F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$.-----8 分

对照：

（1）教材 32 页第 23 题

23. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a, f(b)>b$，证明方程 $f(x)=x$ 在 (a,b) 内至少有一实根。

（2）教材 46 页第 27 题

27. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续，且 $f(2)=0, f(1)=$ ，求证：存在 $\xi\in(1,2)$，使 $f(\xi)=\xi$。

（3）考前绝密卷二第 51 题

51. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f(\xi)=\int_{\xi}^{1}f(x)dx$。