

2009 年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试
高等数学

题号	一	二	三	四	五	总分
分值	60	30	40	14	6	150

注意事项:

答题前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号涂写在答题卡上。
本试卷的试题答案应答在答题卡上, 答在试卷上无效。

一、选择题 (每小题 2 分, 共 60 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。

1. 下列函数相等的是

A. $y = \frac{x^2}{x}, y = x$

B. $y = \sqrt{x^2}, y = x$

C. $y = x, y = (\sqrt{x})^2$

D. $y = |x|, y = \sqrt{x^2}$

2. 下列函数中为奇函数的是

A. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

B. $f(x) = x \tan x$

C. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

D. $f(x) = \frac{x}{1-x}$

3. 极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|}$ 的值是

A. 1

B. -1

C. 0

D. 不存在

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量中与 x 等价的是

A. $2x^2 - x$

B. $\sqrt[3]{x}$

C. $\ln(1+x)$

D. $\sin^2 x$

5. 设 $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

A. 连续点

B. 可去间断点

C. 跳跃间断点

D. 无穷间断点

6. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则 $f'(1) =$

A. 2

B. -1

C. 1

D. -2

7. 设函数 $f(x)$ 具有四阶导数, 且 $f''(x) = \sqrt{x}$, 则 $f^{(4)}(x) =$
- A. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ B. \sqrt{x} C. 1 D. $-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$
8. 曲线 $\begin{cases} y = \sin 2t \\ x = \cos t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的法线方程为
- A. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $y = 1$ C. $y = x + 1$ D. $y = x - 1$
9. 已知 $d[e^{-x} f(x)] = e^x dx$, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x) =$
- A. $e^{2x} + e^x$ B. $e^{2x} - e^x$ C. $e^{2x} + e^{-x}$ D. $e^{2x} - e^{-x}$
10. 函数在某点处连续是其在该点处可导的
- A. 必要条件 B. 充分条件 C. 充分必要条件 D. 无关条件
11. 曲线 $y = x^4 - 24x^2 + 6x$ 的凸区间为
- A. $(-2, 2)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$
12. 曲线 $y = \frac{e^x}{x}$
- A. 仅有水平渐近线 B. 既有水平又有垂直渐近线
C. 仅有垂直渐近线 D. 既无水平又无垂直渐近线
13. 下列说法正确的是
- A. 函数的极值点一定是函数的驻点 B. 函数的驻点一定是函数的极值点
C. 二阶导数非零的驻点一定是极值点 D. 以上说法都不对
14. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且不是常数函数, 若 $f(a) = f(b)$, 则在 (a, b) 内
- A. 必有最大值或最小值 B. 既有最大值又有最小值
C. 既有极大值又有极小值 D. 至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$
15. 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln x$, 则 $f'(x) =$
- A. $\frac{1}{x}$ B. $-\frac{1}{x^2}$ C. $\ln x$ D. $x \ln x$
16. 若 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 则 $\int xf(1-x^2) dx =$
- A. $-2(1-x^2)^2 + C$ B. $2(1-x^2)^2 + C$
C. $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$ D. $\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$

17. 下列不等式中不成立的是

A. $\int_1^2 \ln x dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$

C. $\int_0^2 \ln(1+x) dx < \int_0^2 x dx$

D. $\int_0^2 e^x dx < \int_0^2 (1+x) dx$

18. $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx =$

A. $\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$

B. $\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx - \int_1^e \ln x dx$

C. $-\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$

D. $-\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx - \int_1^e \ln x dx$

19. 下列广义积分中收敛的是

A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$

D. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x}} dx$

20. 方程 $x^2 + y^2 - z = 0$ 在空间直角坐标系中表示的曲面是

A. 球面

B. 圆锥面

C. 旋转抛物面

D. 圆柱面

21. 设 $\vec{a} = \{-1, 1, 2\}$, $\vec{b} = \{2, 0, 1\}$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为

A. 0

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{2}$

22. 直线 $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$ 与平面 $4x - 2y - 2z = 3$ 的位置关系是

A. 平行但直线不在平面上

B. 直线在平面上

C. 垂直

D. 相交但不垂直

23. 设 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 处有偏导数, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a-h, b)}{h} =$

A. 0

B. $2f'_x(a, b)$

C. $f'_x(a, b)$

D. $f'_y(a, b)$

24. 函数 $z = \frac{x+y}{x-y}$ 的全微分 $dz =$

- A. $\frac{2(xdx - ydy)}{(x-y)^2}$ B. $\frac{2(ydy - xdx)}{(x-y)^2}$
C. $\frac{2(ydx - xdy)}{(x-y)^2}$ D. $\frac{2(xdy - ydx)}{(x-y)^2}$

25. $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx$ 化为极坐标形式为

- A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

26. 设 L 是以 $A(-1,0), B(-3,2), C(3,0)$ 为顶点的三角形区域的边界, 方向为 $ABCA$, 则 $\oint_L (3x-y)dx + (x-2y)dy =$

- A. -8 B. 0 C. 8 D. 20

27. 下列微分方程中, 可分离变量的方程是

- A. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ B. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
C. $\frac{x}{y}dx + e^{x^2+y^2}dy = 0$ D. $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

28. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列级数中收敛的是

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{10}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 10)$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{u_n}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 10)$

29. 函数 $f(x) = \ln(1-x)$ 的幂级数展开式为

- A. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots, -1 < x \leq 1$ B. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, -1 < x \leq 1$
C. $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots, -1 \leq x < 1$ D. $-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots, -1 \leq x < 1$

30. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 则此级数在 $x = 2$ 处

- A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 无法确定

二、填空题 (每小题 2 分, 共 30 分)

31. 已知 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

32. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $1 - \cos x$ 等价, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

33. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

34. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

35. 曲线 $y = \frac{3x}{1+x}$ 在 $(2, 2)$ 点处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

36. 函数 $f(x) = x^2 - x - 2$ 在区间 $[0, 2]$ 上使用拉格朗日中值定理时, 结论中的 $\xi = \underline{\hspace{2cm}}$.

37. 函数 $f(x) = x - \sqrt{x}$ 的单调减少区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

38. 已知 $f(0) = 2, f(2) = 3, f'(2) = 4$, 则 $\int_0^2 x f''(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

39. 设向量 \vec{b} 与 $\vec{a} = \{1, -2, 3\}$ 共线, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 56$, 则 $\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

40. 设 $z = e^{x^2+y^2}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

41. 函数 $f(x, y) = 2x^2 + xy - 2y^2$ 的驻点为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

42. 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq 9$, 则 $\iint_D x^2 y d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$.

43. 交换积分次序后, $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

44. 已知 $y = -\frac{1}{4} x e^{-x}$ 是微分方程 $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$ 的一个特解, 则该方程的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

45. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = n^3$, 则当 $n \geq 2$ 时, $u_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题（每小题 5 分，共 40 分）

46. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

47. 设 $y = f(x)$ 是由方程 $e^{xy} + y \ln x = \sin 2x$ 确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx}$.

48. 已知 $\int x f(x) dx = e^{-2x} + C$ ，求 $\int \frac{1}{f(x)} dx$.

49. 求 $\int_{-4}^4 |x(x-1)| dx$.

50. 已知 $z = e^{x^2+xy-y^2}$ ，求全微分 dz .

51. 求 $\iint_D (2x+y) d\sigma$ ，其中区域 D 由直线 $y=x$ ， $y=2x$ ， $y=2$ 围成.

52. 求微分方程 $y' - 2xy = xe^{-x^2}$ 的通解.

53. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}$ 的收敛区间（考虑区间的端点）.

四、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

54. 靠一堵充分长的墙边，增加三面墙围成一矩形场地，在限定场地面积为 $64m^2$ 的条件下，问增加的三面墙各长多少时，其总长最小.

55. 设 D 是由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$ ， $y=3$ 围成的区域，其中

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 6-x, & x > 2 \end{cases},$$

求 D 绕 y 轴旋转形成的旋转体的体积.

五、证明题（6 分）

56. 设 $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$ ，其中函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$ ，证明在开区间 (a, b) 内，方程 $F(x) = 0$ 有唯一实根.