2008年河南省普通高等学校

选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试

高等数学 试卷

题 号	一	二	三	四	五	总 分	核分人
分 数							

得分	评卷人

一、单项选择题 （每小题2分，共60分）

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案，并将其代码写在题干后面的括号内．不选、错选或多选者，该题不得分．

1. 函数 $f(x)=ln(1-x)+\sqrt{x+2}$ 的定义域为 【　　】

A. $[-2,-1]$　B. $[-2,1]$　C. $[-2,1)$　D. $(-2,1)$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{3})}=$ 【　　】

A. 1　B. 0　C. $\sqrt{2}$　D. $\sqrt{3}$

3. 点 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ 的 【　　】

A. 连续点　B. 跳跃间断点　C. 可去间断点　D. 第二类间断点

4. 下列极限存在的为 【　　】

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{x}$　C. $\lim\limits_{x\to0^+}\cos\dfrac{1}{x}$　D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{x-3}$

5. 当 $x\to0$ 时，$ln(1+x^2)$ 是比 $1-\cos x$ 的 【　　】

A. 低阶无穷小　B. 高阶无穷小　C. 等价无穷小　D. 同阶但不等价无穷小

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+(x+1)\sin\dfrac{1}{x+1}, & x<-1\\ 1, & -1\le x\le0,\\ \arctan x, & x>0\end{cases}$ 则 $f(x)$ 【　　】

A. 在 $x=-1$ 处连续，在 $x=0$ 处不连续

B. 在 $x=0$ 处连续，在 $x=-1$ 处不连续

C. 在 $x=-1,0$ 处均连续

D. 在 $x=-1,0$ 处均不连续

7. 过曲线 $y=\arctan x+e^x$ 上的点 $(0,1)$ 处的法线方程为 【　　】

A. $2x-y+1=0$　B. $x-2y+2=0$

C. $2x-y-1=0$　D. $x+2y-2=0$

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(x)=f(0)-3x+\alpha(x)$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=0$，则 $f'(0)=$ 【　　】

A. -1　B. 1　C. -3　D. 3

9. 若函数 $f(x)=(lnx)^x(x>1)$，则 $f'(x)=$ 【　　】

A. $(lnx)^{x-1}$　B. $(lnx)^{x-1}+(lnx)^x ln(lnx)$

C. $(lnx)^x ln(lnx)$　D. $x(lnx)^x$

10. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\cos^3t\\ y=\sin^3t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ 【　　】

A. -2　B. -1　C. $-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　D. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

11. 下列函数中，在区间 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是 【　　】

A. $y=e^x$　B. $y=ln|x|$　C. $y=1-x^2$　D. $y=\dfrac{1}{x^2}$

12. 曲线 $y=x^3+5x-2$ 的拐点是 【　　】

A. $x=0$　B. $(0,-2)$　C. 无拐点　D. $x=0,y=-2$

13. 曲线 $y=\dfrac{1}{|x-1|}$ 【　　】

A. 只有水平渐近线　B. 既有水平渐近线，又有垂直渐近线

C. 只有垂直渐近线　D. 既无水平渐近线，又无垂直渐近线

14. 如果 $f(x)$ 的一个原函数是 $xlnx$，那么 $\int x^2f''(x)dx=$ 【　　】

A. $lnx+C$　B. x^2+C　C. x^3lnx+C　D. $C-x$

15. $\int\dfrac{dx}{x^2-4x+3}=$ 【　　】

A. $\dfrac{1}{2}ln\left|\dfrac{x-3}{x-1}\right|+C$　B. $ln\left|\dfrac{x-1}{x-3}\right|+C$

C. $ln(x-3)-ln(x-1)+C$　D. $ln(x-1)-ln(x-3)+C$

16. 设 $I=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^4}dx$，则 I 的取值范围为 【　　】

A. $0\le I\le1$　B. $\dfrac{1}{2}\le I\le1$　C. $0\le I\le\dfrac{\pi}{4}$　D. $\dfrac{1}{2}<I<1$

17. 下列广义积分收敛的是 【　　】

A. $\int_1^{+\infty}x^3dx$　B. $\int_1^{+\infty}\dfrac{lnx}{x}dx$　C. $\int_1^{+\infty}\sqrt{x}dx$　D. $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$

18. $\int_{-3}^3|1-x|dx=$ 【　　】

A. $2\int_0^3|1-x|dx$　B. $\int_{-3}^1(x-1)dx+\int_1^3(1-x)dx$

C. $\int_{-3}^1(1-x)dx-\int_1^3(x-1)dx$　D. $\int_{-3}^1(1-x)dx+\int_1^3(x-1)dx$

座　号	

19. 若 $f(x)$ 为可导函数, $f(x)>0$, 且满足 $f^2(x) = \ln^2 2 - 2\int_0^x \frac{f(t)\sin t}{1+\cos t}dt$, 则 $f(x)=$ 【 】

A. $\ln(1+\cos x)$　　B. $-\ln(1+\cos x)+C$

C. $-\ln(1+\cos x)$　　D. $\ln(1+\cos x)+C$

20. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x + 1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx$, 则 $f(x) =$ 【 】

A. $x-\frac{1}{3}$　　B. $x-\frac{1}{2}$　　C. $x+\frac{1}{2}$　　D. $x+\frac{1}{3}$

21. 若 $I = \int_0^e x^3 f(x^2)dx$, 则 $I =$ 【 】

A. $\int_0^{e^2} xf(x)dx$　　B. $\int_0^e xf(x)dx$　　C. $\frac{1}{2}\int_0^{e^2} xf(x)dx$　　D. $\frac{1}{2}\int_0^e xf(x)dx$

22. 直线 $\frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{9} = \frac{z}{1}$ 与平面 $4x-3y+7z=5$ 的位置关系为 【 】

A. 直线与平面斜交　　B. 直线与平面垂直

C. 直线在平面内　　D. 直线与平面平行

23. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} =$ 【 】

A. 2　　B. 3　　C. 1　　D. 不存在

24. 曲面 $z = x^2+y^2$ 在点 $(1,2,5)$ 处的切平面方程为 【 】

A. $2x+4y-z=5$　　B. $4x+2y-z=5$

C. $x+2y-4z=5$　　D. $2x-4y+z=5$

25. 设函数 $z = x^3y - xy^3$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} =$ 【 】

A. $6xy$　　B. $3x^2-3y^2$　　C. $-6xy$　　D. $3y^2-3x^2$

26. 如果区域 D 被分成两个子区域 D_1 和 D_2, 且 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = 5$, $\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = 1$, 则 $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy =$ 【 】

A. 5　　B. 4　　C. 6　　D. 1

27. 如果 L 是摆线 $\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 1-\cos t \end{cases}$ 从点 $A(2\pi,0)$ 到点 $B(0,0)$ 的一段弧, 则曲线积分 $\int_L (x^2y+3xe^x)dx + (\frac{1}{3}x^3 - y\sin y)dy =$ 【 】

A. $e^{2\pi}(1-2\pi)-1$　　B. $2[e^{2\pi}(1-2\pi)-1]$

C. $3[e^{2\pi}(1-2\pi)-1]$　　D. $4[e^{2\pi}(1-2\pi)-1]$

28. 通解为 $y = Ce^x$ (C 为任意常数) 的微分方程为 【 】

A. $y'+y=0$　　B. $y'-y=0$　　C. $yy'=1$　　D. $y-y'+1=0$

29. 微分方程 $y''+y' = xe^{-x}$ 的特解形式应设为 $y^* =$ 【 】

A. $x(ax+b)e^{-x}$　　B. $ax+b$　　C. $(ax+b)e^{-x}$　　D. $x^2(ax+b)e^{-x}$

30. 下列四个级数中, 发散的级数是 【 】

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{1000n}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

得分	评卷人

二、填空题 （每小题 2 分，共 30 分）

31. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的______条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

32. 函数 $y = x-\sin x$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内单调______, 其曲线在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内的凹凸性为______的.

33. 设方程 $3x^2+2y^2+z^2 = a$ (a 为常数) 所确定的隐函数为 $z = f(x,y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ______.

34. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} =$ ______.

35. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{1+\cos x}dx =$ ______.

36. 在空间直角坐标系中, 以 $A(0,-4,1)$, $B(-1,-3,1)$, $C(2,-4,0)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 的面积为______.

37. 方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \\ x=-2 \end{cases}$ 在空间直角坐标系下的图形为______.

38. 函数 $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$ 的驻点为______.

39. 若 $z = x^2y + e^{1-x}\sqrt{xy^3+2}\tan\sqrt{\frac{y}{x}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)} =$ ______.

40. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_x^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y}{y}dy =$ ______.

41. 直角坐标系下二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (其中 D 为环域 $1 \leq x^2+y^2 \leq 9$) 化为极坐标形式为______.

42. 以 $y = C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$ 为通解的二阶常系数线性齐次微分方程为______.

43. 等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ ($a \neq 0$), 当______时级数收敛, 当______时级数发散.

44. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$ 展开为 x 的幂级数为______.

45. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-2}{n})^n$ 是敛散性为________的级数.

得分	评卷人

三、计算题 （每小题 5 分,共 40 分）

46. 求$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+5}{2}}$.

47. 求$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\int_0^{x^2}t\sqrt[3]{1+t^2}dt}$.

48. 已知$y=ln\sin(1-2x)$,求$\frac{dy}{dx}$.

49. 计算不定积分$\int x\arctan x dx$.

50. 求函数$z=e^x\cos(x+y)$的全微分.

51. 计算$\iint\limits_D\frac{x}{y^2}d\sigma$,其中$D$是由$y=2,y=x,xy=1$所围成的区域.

52. 求微分方程$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$满足初始条件$y(0)=-1$的特解.

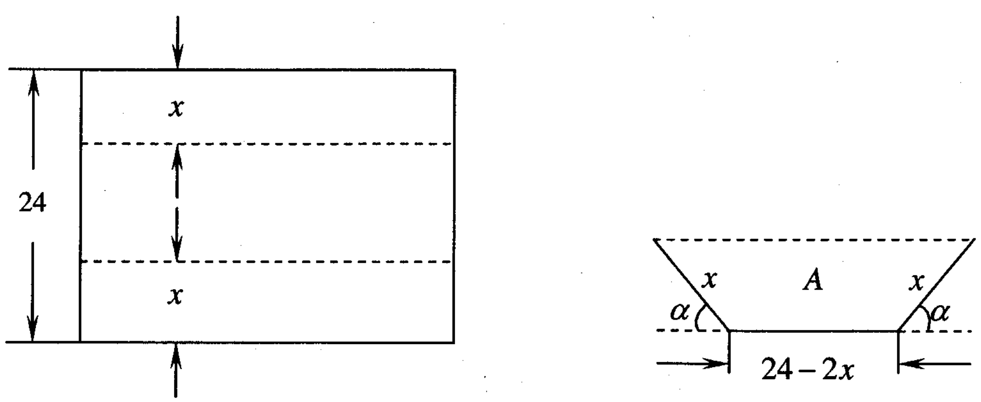
53. 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}x^n$的收敛半径和收敛区间(考虑区间端点).

得分	评卷人

四、应用题 （每小题7分，共14分）

54. 过曲线 $y = x^2$ 上一点 $M(1,1)$ 作切线 L，D 是由曲线 $y = x^2$，切线 L 及 x 轴所围成的平面图形. 求：(1) 平面图形 D 的面积. (2) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

55. 一块铁皮宽24厘米，把它的两边折上去，做成一个正截面为等腰梯形的槽(如下图)，要使等腰梯形的面积 A 最大，求腰长 x 和它对底边的倾斜角 α.



55 题图

得分	评卷人

五、证明题 （6分）

56. 证明方程 $lnx = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - cos2x}dx$ 在区间 (e,e^3) 内仅有一个实根.

热烈祝贺云飞专升本培训大获全胜！

《高等数学》有142分均可在专用教材、全仿真预测试卷、密押试卷中找到原形题目，三套密押试卷中有65分的原形题。

《公共英语》有80分左右的原题，具体请6月9日看英语试卷。

《管理学》有100分左右的原题，具体请6月9日看管理学试卷。

由于时间紧，答案仅作参考，更为准确的答案在6月9号下午放到网上。

2008年河南省普通高等学校

选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试

《高等数学》试卷

题号	一	二	三	四	五	总分	核分人
分数							

得分	评卷人

一. **单项选择题**（每题2分，共计60分）

在每小题的备选答案中选出一个正确答案，并将其代码写在题干后面的括号内.不选、错选或多选者，该题无分.

1. 函数 $f(x)=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$ 的定义域是　　（　　）

A. $[-2,-1]$　　B. $[-2,1]$　　C. $[-2,-1)$　　D. $[-2,1)$

解：$\begin{cases}1-x>0\\ x+2\ge 0\end{cases}\Rightarrow -2\le x<1\Rightarrow D.$

注：全真预测卷（十二）选择题（1）.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=$　　（　　）

A. 1　　B. 0　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}\overset{\frac{0}{0}}{===}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\sqrt{3}\Rightarrow D.$

注：密押卷（三）选择题（3）

3. 点 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ 的　　（　　）

A.连续点　　B. 跳跃间断点　　C.可去间断点　　D. 第二类间断点

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{-1}{1}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}\overset{\frac{0}{0}}{==}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}\ln 3}{3^{\frac{1}{x}}\ln 3}=1\Rightarrow B.$

注：全真预测卷（八）选择题（4）；全真预测卷（九）选择题（5）.

4. 下列极限存在的为　　（　　）

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$　　C. $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\dfrac{1}{x}$　　D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{x-3}$

解:显然只有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$，其他三个都不存在,应选B.

注：全真预测卷（七）选择题（3）.

5. 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)$ 是比 $1-\cos x$ 的（　　）

A. 低阶无穷小　　B. 高阶无穷小　　C. 等阶无穷小　　D.同阶不等价无穷小

解：$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x^2}{2}\Rightarrow D.$

注：全真预测卷（六）选择题（4）.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1+(x+1)\sin\dfrac{1}{x+1}, & x<-1 \\ 1 & -1\le x\le 0 \\ \arctan x & x>0 \end{cases}$，则 $f(x)$ （　　）

A. 在 $x=-1$ 处连续，在 $x=0$ 处不连续　　B. 在 $x=0$ 处连续，在 $x=-1$ 处不连续

C. 在 $x=-1$，$x=0$，处均连续　　D. 在 $x=-1$，$x=0$，处均不连续

解：$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1, \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1, f(-1)=1 \Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续;

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0, f(0)=1 \Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续;应选 A.

7. 函数 $y=\arctan x+e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程是 （　　）

A. $2x-y+1=0$　　B. $x-2y+2=0$

C. $2x-y-1=0\ (0,0)$　　D. $x+2y-2=0$

解：$y'=\dfrac{1}{1+x^2}+e^x \Rightarrow f'(0)=2 \Rightarrow k_{法}=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow D.$

注：密押卷（三）选择题（7）.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(x)=f(0)-3x+\alpha(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=0$，则 $f'(0)=$ （　　）

A. -1　　B.　　C. -3　　D. 3

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x+\alpha(x)}{x}=-3+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=-3$, 应选 C.

9. 若 $f(x)=(\ln x)^x\ (x>1)$，则 $f'(x)=$ （　　）

A. $(\ln x)^{x-1}$　　B. $(\ln x)^{x-1}+(\ln x)^x\ln(\ln x)$

C. $(\ln x)^x\ln(\ln x)$　　D. $x(\ln x)^x$

解：$f(x)=(\ln x)^x=e^{x\ln(\ln x)} \Rightarrow y'=(\ln x)^x[x\ln(\ln x)]'=(\ln x)^{x-1}+(\ln x)^x\ln(\ln x)$，应选 B.

注:密押卷（一）计算题（47）.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ （t 为参数）确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=$ （　　）

A. -2　　B. -1　　C. $-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sin t}{\cos t} \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{\cos^2 t}\times\dfrac{1}{3\cos^2 t\sin t} \Rightarrow \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$, 应选 D.

注：密押卷（一）填空题（34），注：密押卷（二）选择题（9）.

11. 下列函数在区间 $[-1,1]$ 上满足罗尔中值定理条件的是 （　　）

A. $y=e^x$　　B. $y=\ln|x|$　　C. $y=1-x^2$　　D. $y=\dfrac{1}{x^2}$

解：验证罗尔中值定理的条件,只有 $y=1-x^2$ 满足,应选 C.

注：密押卷（三）选择题（11）.

12. 曲线 $y=x^3+5x-2$ 的拐点是 （　　）

A. $x=0$　　B. $(0,-2)$　　C. 无拐点　　D. $x=0,y=-2$

解：$y''=6x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,-2)$, 应选 B.

注：密押卷（三）填空题（33）．第三版教材 106 页选择题(1)（葛云飞主编，沈阳出版社）.

13. 曲线 $y=\dfrac{1}{|x-1|}$ （　　）

A. 只有水平渐进线　　B. 既有水平渐进线又有垂直渐进线

C. 只有垂直渐进线　　D. 既无水平渐进线又无垂直渐进线

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x-1|}=0,\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}=\infty \Rightarrow B.$

注：密押卷（二）选择题（8）.

14. 如果 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x$，那么 $\int x^2 f''(x)dx=$ （　　）

A. $\ln x+C$　　B. x^2+C

C. $x^3\ln x+C$　　　　D. $-x+C$

解: $f(x)=(x\ln x)'=1+\ln x\Rightarrow f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow\int x^2f''(x)dx=-\int dx=-x+C$, 应选 D.

注: 全真预测卷（九）选择题（13）.

15. $\int\dfrac{dx}{x^2-4x+3}=$　（　　）

A. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-3}{x-1}\right|+C$　　B. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x-3}\right|+C$

C. $\ln(x-3)-\ln(x-1)+C$　　D. $\ln(x-1)-\ln(x-3)+C$

解: $\int\dfrac{dx}{x^2-4x+3}=\int\dfrac{dx}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{1}{2}\int\left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1}\right]dx=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-3}{x-1}\right|+C$, 应选 A.

注: 第三版教材 133 页计算 35（葛云飞主编，沈阳出版社）.

16. 设 $I=\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^4}$，则 I 的取值范围　（　　）

A. $0\le I\le 1$　B. $\dfrac{1}{2}\le I\le 1$　C. $0\le I\le\dfrac{\pi}{4}$　D. $\dfrac{1}{2}<I<1$

解: 此题有问题, 定积分是一个常数, 有 $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{1+x^4}\le 1$, 根据定积分的估值性质, 有 $\dfrac{1}{2}\le I\le 1$, 但这个常数也在其它三个区间, 更准确应为 D.

17. 下列广义积分收敛的是　（　　）

A. $\int_1^{+\infty}x^3dx$　B. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}dx$　C. $\int_1^{+\infty}\sqrt{x}dx$　D. $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$

解: 显然应选 D.

注: 密押卷（一）选择题（17）.

18. $\int_{-3}^{3}|1-x|dx=$　（　　）

A. $2\int_0^3|1-x|dx$　　B. $\int_{-3}^{1}(x-1)dx+\int_1^3(1-x)dx$

C. $\int_{-3}^{1}(1-x)dx-\int_1^3(x-1)dx$　　D. $\int_{-3}^{1}(1-x)dx+\int_1^3(x-1)dx$

解: $\int_{-3}^{3}|1-x|dx=\int_{-3}^{1}|1-x|dx+\int_1^3|1-x|dx=\int_{-3}^{1}(1-x)dx+\int_1^3(x-1)dx$, 应选 D.

注: 第三版教材 163 页 16 题的第 5 小题（葛云飞主编，沈阳出版社）.

19. 设 $f(x)$ 可导，$f(x)>0$ 且 $f^2(x)=\ln^2 2-2\int_0^x\dfrac{f(t)\sin t}{1+\cos t}dt$，则 $f(x)=$（　　）

A. $\ln(1+\cos x)$　　B. $-\ln(1+\cos x+C)$

C. $-\ln(1+\cos x)$　　D. $\ln(1+\cos x)+C$

解: 对 $f^2(x)=\ln^2 2-2\int_0^x\dfrac{f(t)\sin t}{1+\cos t}dt$ 两边求导有: $2f(x)f'(x)=-2\dfrac{f(x)\sin x}{1+\cos x}$,

即有 $f'(x)=-\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\Rightarrow f(x)=-\int\dfrac{\sin x}{1+\cos x}dx=\int\dfrac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$=\ln(1+\cos x)+C$, 应选 D.

注: 第三版教材 164 页第 29 题（葛云飞主编，沈阳出版社）.

20. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x+1-\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)dx$，则 $f(x)=$　（　　）

A. $x-\dfrac{1}{3}$　B. $x-\dfrac{1}{2}$　C. $x+\dfrac{1}{2}$　D. $x+\dfrac{1}{3}$

解: 令 $a=\int_{-1}^{1}f(x)dx$, 则 $f(x)=x+1-\dfrac{1}{2}a$,

故有 $a=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1-\dfrac{1}{2}a)dx=2-a\Rightarrow a=1\Rightarrow f(x)=x+\dfrac{1}{2}$, 应选 C.

注: 密押卷（一）填空题（39）.

21. 若 $I=\int_0^a x^3f(x^2)dx$　则 $I=$　（　　）

A $\int_0^{a^2}xf(x)dx$　　B $\int_0^a xf(x)dx$

C $\dfrac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)dx$　　D $\dfrac{1}{2}\int_0^a xf(x)dx$

解: $I=\dfrac{1}{2}\int_0^a x^2f(x^2)d(x^2)\overset{x^2=t}{=\!=\!=}\dfrac{1}{2}\int_0^{a^2}tf(t)d(t)=\dfrac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)d(x)$, 应选 C.

注: 全真预测卷（十一）选择题（14）.

22. 直线 $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+4}{9}=\dfrac{z}{1}$ 与平面 $4x-3y+7z=5$ 的位置关系为

A. 直线与平面斜交　　　　B. 直线与平面垂直

C. 直线在平面内　　　　D. 直线与平面平行

解: $\vec{s}=\{5,9,1\},\vec{n}=\{4,-3,7\}\Rightarrow\vec{s}\perp\vec{n}$,而点(-2,-4,0)不在平面内,为平行,应选 D.

注: 第三版教材 221 页选择 6.（葛云飞主编，沈阳出版社）; 全真预测卷（十一）选择题（16）.

23. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=$ （　　）

A. 2　　B. 3　　C. 1　　D. 不存在

解: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)=2$, 应选 A.

注: 密押卷（一）选择题（20）.

24. $z=x^2+y^2$在点（1, 2, 5）外切平面方程（　　）

A. $2x+4y-z=5$　　B. $4x+2y-z=5$

C. $x+2y-4z=5$　　D. $2x-4y+z=5$

解:令$F(x,y,z)=x^2+y^2-z$, $F_x'(1,2,5)=2, F_y'(1,2,5)=4, F_z'(1,2,5)=-1\Rightarrow$

$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0\Rightarrow 2x+4y-z=5$, 也可以把点（1, 2, 5）代入方程验证, 应选 A.

25. 设$z=x^3y-xy^3$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$ （　　）

A. $6xy$　　B. $3x^2y-2y^2$　　C. $-6xy$　　D. $3x^2-3y^2$

解: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2\Rightarrow\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=3x^2-3y^2$, 应选 D.

注: 第三版教材 252 页例 10 题（葛云飞主编，沈阳出版社）; 注: 密押卷（二）选择题（20）.

26. 如果区域 D 被分为两个 D_1, D_2 且 $\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy=5$, $\iint\limits_{D_2}f(x,y)dxdy=1$, 则 $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=$（　　）

A. 5　　B. 4　　C. 6　　D. 1

解:根据二重积分的可加性, $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=6$, 应选 C.

注: 第三版教材 278 页二重积分的性质（葛云飞主编，沈阳出版社）.

27. L是沿曲线$\begin{cases}x=t-\sin t\\y=1-\cos t\end{cases}$从点$(2\pi,0)$到点$(0,0)$弧段, 则 $\int_L(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy=$ （　　）

A.　　B.　　C.　　D.

注: 全真预测卷（三）选择题（27）; 第三版教材 321 页选择第 9 题。（葛云飞主编，沈阳出版社）

28. 以通解为$y=Ce^x$为通解的微分方程为（　　）

A. $y'+y=0$　　B. $y'-y=0$

C. $y'+y=C$　　D. $y'-y=C$

解: $y=Ce^x\Rightarrow y'=Ce^x\Rightarrow y'-y=0$, 应选 B.

注:第三版教材 366 页例 1 题（葛云飞主编，沈阳出版社）.

29. 微分方程$y''+y'=xe^{-x}$的特解应设为

A. $y^*=x(ax+b)e^{-x}$　　B. $y^*=ax+b$

C. $y^*=(ax+b)e^{-x}$　　D. $y^*=x^2(ax+b)e^{-x}$

解:-1 是单特征方程的根, x 是一次多项式, 应设 $y^*=x(ax+b)e^{-x}$, 应选 A.

注: 密押卷（三）选择题（25）.

30. 下列级数发散的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$　　B. $\sum_{n=21}^{\infty}\frac{2n-3}{1000n}$

C. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^n}$　　D. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

解:级数$\sum_{n=21}^{\infty}\frac{2n-3}{1000n}$的一般项$\frac{2n-3}{1000n}$的极限为$\frac{1}{500}\neq 0$,是发散的,应选 B.

注：密押卷（三）选择题（24）.

得分	评卷人

二、填空题（每题 2 分，共 30 分）

31. $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$的__________条件是$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

解：显然为充要(充分且必要).

注：第三版教材 19 页极限定义注意(4)（葛云飞主编，沈阳出版社）.

32. 函数$y=x-\sin x$在区间$(0,2\pi)$单调_________，其曲线在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内的凹凸性为________

解：$y'=1-\cos x>0\Rightarrow$在$(0,2\pi)$内单调增加, $y''=\sin x$在$(0,\frac{\pi}{2})$内大于零,应为凹的.

注：密押卷（一）填空题（35）密押卷（三）选择题（12）

33. 设方程$3x^2+2y^2+z^2=a$(a为常数)所确定的隐函数$z=f(x,y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$_____

解：$F=3x^2+2y^2+z^2-a\Rightarrow F_z'=2z, F_x'=6x\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{3x}{z}$.

注：全真预测卷（十）填空题（42），注：密押卷（一）选择题（21）.

34. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=$__________

解：$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}\overset{\sqrt{x}=t}{==}\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2t-2\ln(1+t)+C$

$=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$.

注：第三版教材 133 页第 50 题。（葛云飞主编，沈阳出版社）

35. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{1+\cos x}dx=$__________

解：函数$\frac{x}{1+\cos x}$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$是奇函数，所以$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{1+\cos x}dx=0$.

注：密押卷（一）填空题（40）．密押卷（三）填空题（36）

36. 在空间直角坐标系中$A(0,-4,1)$，$B(-1,-3,1)$，$C(2,-4,0)$ 则ΔABC 的面积为______

解：$\overline{AB}=\{-1,1,0\},\overline{AC}=\{2,0,-1\}\Rightarrow\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&1&0\\2&0&-1\end{vmatrix}=\{-1,-1,-2\}$，所以$\Delta$ABC 的面积为$\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

注：第三版教材 203 页例 13 题。（葛云飞主编，沈阳出版社）；密押卷（三）填空题（37）

37. 方程$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1\\z=-2\end{cases}$在空间直角坐标下的图形为_________

解:是椭圆柱面与平面的交线,为椭圆.

注：全真预测卷（九）选择题（18）；

38. 函数$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$的驻点为 ________

解：$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0\\\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases}\Rightarrow(0,0),(1,1)$.

注：密押卷（三）选择题（19）.

39. 设函数$z = x^2 y + e^{1-x}\sqrt{xy^3+2}\tan\sqrt{\dfrac{y}{x}}$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} =$ ________

解：$f(x,0)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=0$.

注：全真预测卷（十）选择题（22）.

40. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\int_x^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos y}{y}dy =$ ____________

解：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\int_x^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{y}\cos y dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dy\int_0^{y}\dfrac{1}{y}\cos y dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos y dy=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

注：第三版教材 285 页例 8 题（葛云飞主编，沈阳出版社），全真预测卷（五）计算题（51）.

41. 直角坐标系下的二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$（其中$D$为环域$1\le x^2+y^2\le 9$）化为极坐标形式为________________________.

解：$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^3 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$.

注：密押卷（一）选择题（24）.

42. 以$y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$为通解的二阶常系数线性齐次微分方程为____________

解：由$y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$为通解知，有二重特征根-3，从而$p=6, q=9$，微分方程为$y''+6y'+9y=0$.

注：全真预测卷（四）填空（45）；第三版教材 395 页填空题的第 5 题。（葛云飞主编，沈阳出版社）

43. 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$，当______时，级数收敛，当______时，级数发散.

解：级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$是等比级数，当$|q|<1$时，级数收敛，当$|q|\ge 1$时，级数发散.

注：第三版教材 326 页结论。（葛云飞主编，沈阳出版社）

44. 函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$展开为x的幂级数为______________

解：$f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2-x}\right]=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{n+1}}\right]x^n \ (-1<x<1).$$

注：全真预测卷（五）计算（52）.

45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n$的敛散性为_______的级数.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}\times(-2)}=e^{-2}\ne 0$，级数发散.

得分	评卷人

三、计算题（每小题 5 分，共 40 分）

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+5}{2}}$.

解：
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+5}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}}\right)^{\frac{x^2+5}{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{2}}\times\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}}{\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{3}\times(-\frac{3}{2})}\times\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{2}}\times\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{3}\times(-\frac{3}{2})}\times\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{e}{e^{-\frac{3}{2}}}=e^{\frac{5}{2}}.$$

注：第三版教材 25 页例 16 题第 4 小题（葛云飞主编，沈阳出版社）.

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{\int_0^{x^2}t\sqrt{1+t^2}dt}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{\int_0^{x^2} t\sqrt{1+t^2}dt}\overset{\frac{0}{0}}{==}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3}{x^2\sqrt{1+x^4}\times 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x^4}}=2$.

注：全真预测卷（五）计算（46）. 全真预测卷（七）计算（46）

48. 已知$y=\ln\sin(1-2x)$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sin(1-2x)}[\sin(1-2x)]'=\dfrac{\cos(1-2x)}{\sin(1-2x)}[1-2x]'=-2\dfrac{\cos(1-2x)}{\sin(1-2x)}$

$=-2\cot(1-2x)$.

注:密押卷（三）计算题(47),全真预测卷（七）计算（47）.

49. 计算不定积分$\int x\arctan x dx$.

解：$\int x\arctan x dx=\int \arctan x d\left(\dfrac{x^2}{2}\right)=\dfrac{x^2}{2}\arctan x-\int\dfrac{x^2}{2}\times\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$=\dfrac{x^2}{2}\arctan x-\dfrac{1}{2}\int\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=\dfrac{x^2}{2}\arctan x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\arctan x+C$.

注： 第三版教材 124 页例 40 题。（葛云飞主编，沈阳出版社）

50. 求$z=e^x\cos(x+y)$的全微分.

解：利用微分的不变性,

$dz=d[e^x\cos(x+y)]=e^x d\cos(x+y)+\cos(x+y)de^x$

$=-e^x\sin(x+y)d(x+y)+\cos(x+y)e^x dx$

$=-e^x\sin(x+y)[dx+dy]+\cos(x+y)e^x dx$

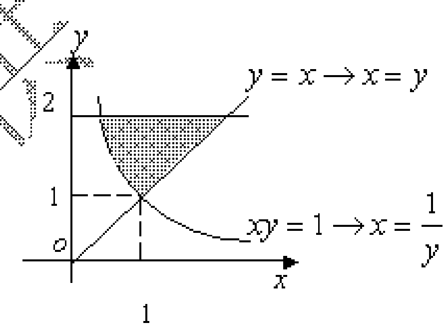
$=[e^x\cos(x+y)-e^x\sin(x+y)]dx-e^x\sin(x+y)dy$.

注:密押卷（三）填空题（38）

51. 计算二重积分$\iint\limits_D\dfrac{x}{y^2}dxdy$，其中$D$由$y=2,y=x,xy=1$所围成的闭区域.

解：积分区域D如图所示;把区域看作Y 型,则有

$D=\left\{(x,y)\,|\,1\le y\le 2,\dfrac{1}{y}\le x\le y\right\}$,



故 $\iint\limits_D\dfrac{x}{y^2}dxdy=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\dfrac{x}{y^2}dx$

$=\int_1^2\dfrac{1}{y^2}dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}xdx=\int_1^2\dfrac{1}{y^2}dy\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_{\frac{1}{y}}^{y}$

$=\dfrac{1}{2}\int_1^2\left[1-\dfrac{1}{y^4}\right]dy=\dfrac{1}{2}\left(y-\dfrac{1}{3y^3}\right)\Big|_1^2=\dfrac{31}{48}$.

注： 第三版教材 288 页第例 13 题。（葛云飞主编，沈阳出版社）

52. 求微分方程$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$满足初始条件$y(0)=-1$的特解.

解:这是一阶线性非齐次微分方程,它对应的齐次微分方程$y'+y\cos x=0$的通解为

$y=Ce^{-\sin x}$,设$y=C(x)e^{-\sin x}$是原方程解,代入方程有$C'(x)e^{-\sin x}=e^{-\sin x}$,

即有$C'(x)=1$,所以$C(x)=x+C$,故原方程的通解为$y=Ce^{-\sin x}+xe^{-\sin x}$,

把初始条件$y(0)=-1$代入得:$C=-1$,故所求的特解为$y=-e^{-\sin x}+xe^{-\sin x}$.

注： 第三版教材 380 页第 16 题第（1）小题。（葛云飞主编，沈阳出版社）；三套密押卷的计算题的最后一题均为此类型.

53. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{n+1}x^n$的收敛半径及收敛域(考虑端点).

解：这是标准的不缺项的幂级数,收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}$,

而$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}}{n+2}\times\dfrac{n+1}{3^n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+2}=3$,

故收敛半径$R=\dfrac{1}{3}$.

当$x=\dfrac{1}{3}$时,级数化为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$,这是调和级数,发散的;

当$x=-\dfrac{1}{3}$时,级数化为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$,这是交错级数,满足莱布尼兹定理的条件,收敛的;

所以级数的收敛域为$\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

注： 第三版教材 362 页计算题第 3 题。（葛云飞主编，沈阳出版社），这是最简单形式求收敛域，密押卷(三)计算题(52).

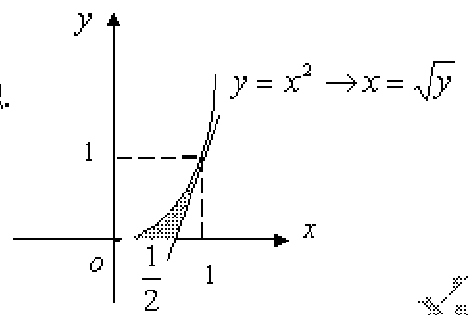
得分	评卷人

四、应用题（每题 7 分，共计 14 分）

54. 过曲线$y=x^2$上一点$M(1,1)$作切线L，D是由曲线$y=x^2$，切线L及x轴所围成的，求

（1）平面图形的面积；

（2）该平面图形绕x轴旋转所成的旋转体的体积.



解：平面图形 D 如图所示：

因$y'=2x$，所以切线L的斜率$k=y'(1)=2$，

切线L的方程为$y-1=2(x-1)$，即$y=2x-1$

取x为积分变量，且$x\in[0,1]$.

（1）平面图形 D 的面积为

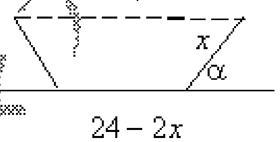
$$S=\int_0^1 x^2dx-\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-(x^2-x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{7}{12}.$$

（2）平面图形 D 绕x轴旋转一周所生成旋转体的体积为

$$V_x=\pi\int_0^1 x^4dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)^2dx=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1-\pi\left(\frac{4x^3}{3}-2x^2+x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{\pi}{30}$$

注：全真预测卷（二）55 题（应用题）；注：密押卷（一）应用题（55）.

55. 有一宽为 24cm 的长方形铁板，把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽(如图)，问怎样折法才能使断面的面积最大？



解：设折起来的边长为$x$cm，倾角为α，则梯形断面的下底长为$24-2x$，上底长为$24-2x+2x\cos\alpha$，高为$x\sin\alpha$，所以断面面积为

$$S=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha\quad(0<x<12,0<\alpha<\frac{\pi}{2}),$$

即$S=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\sin\alpha\cos\alpha$，

令$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial x}=24\sin\alpha-4x\sin\alpha+2x\sin\alpha\cos\alpha=0\\ \dfrac{\partial S}{\partial\alpha}=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0\end{cases}$ 得唯一驻点$\begin{cases}x=8\\ \alpha=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

根据题意可知，断面的面积最大值一定存在，且在$D:0<x<12,0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$内取得，又函数在$D$内只有一个可能的最值点，因此可以断定$x=8,\alpha=\dfrac{\pi}{3}$时，断面的面积最大.

故在长方形铁板的$\dfrac{1}{3}$处折起$\dfrac{\pi}{3}$的二面角，就使等腰梯形的水槽的断面面积最大.

注： 第三版教材 268 页例 7 原题.（葛云飞主编，沈阳出版社）

得分	评卷人

五、证明题（6 分）

56. 方程$\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}dx$在区间$(e,e^3)$有唯一实数根.

证明：构造函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}dx$，

即有 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+\sqrt{2}\int_0^\pi\sin xdx=\ln x-\dfrac{x}{e}+2\sqrt{2}$，显然函数 $f(x)$ 在区间$[e,e^3]$连续，且有$f(e)=2\sqrt{2}>0,f(e^3)=3-e^2+2\sqrt{2}\approx-1.2<0$，由连续函数的零点定理知方程$f(x)=0$即$\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}dx$在区间$(e,e^3)$有至少有一实数根.

另一方面，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}$在区间$(e,e^3)$内恒小于零，有方程$f(x)=0$，即$\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}dx$在区间$(e,e^3)$有至多有一实数根.

综述，方程$\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}dx$在区间$(e,e^3)$有唯一实数根.

注：全真预测卷（三）56 题.