2007年河南省普通高等学校
选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试
《高等数学》试卷

题号	一	二	三	四	五	六	总分	核分人
分数								

得分	评卷人

一．单项选择题（每题2分，共计50分）
在每小题的备选答案中选出一个正确答案，并将其代码写在题干后面的括号内．不选、错选或多选者，该题无分．

1. 集合$\{3,4,5\}$的所有子集共有 （　　）
A. 5　B. 6　C. 7　D. 8
解：子集个数$2^n=2^3=8\Rightarrow D$。

2. 函数$f(x)=\arcsin(x-1)+\sqrt{3-x}$的定义域为 （　　）
A. $[0,3]$　B. $[0,2]$　C. $[2,3]$　D. $[1,3]$
解：$\begin{cases}-1\le x-1\le 1\\ 3-x\ge 0\end{cases}\Rightarrow 0\le x\le 2\Rightarrow B$。

3. 当$x\to 0$时，与x不等价的无穷小量是 （　　）
A. $2x$　B. $\sin x$　C. e^x-1　D. $\ln(1+x)$
解：根据常用等价关系知，只有$2x$与x比较不是等价的。应选A。

4. 当$x=0$ 是函数$f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 的 （　　）
A. 连续点　B. 可去间断点　C. 跳跃间断点　D. 第二类间断点
解：$\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ ；$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow C$。

5. 设$f(x)$ 在$x=1$处可导，且$f'(1)=1$，则$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1+h)}{h}$的值为（　　）
A. -1　B. -2　C. -3　D. -4
解：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}[-2f'(1-2h)-f'(1+h)=-3f'(1)=-3\Rightarrow C$ 。

6. 若函数$f(x)$在区间(a,b)内有$f'(x)>0, f''(x)<0$，则在区间(a,b)内，$f(x)$图形 （　　）
A. 单调递减且为凸的　B. 单调递增且为凸的
C. 单调递减且为凹的　D. 单调递增且为凹的
解：$f'(x)>0\Rightarrow$单调增加；$f''(x)<0\Rightarrow$凸的。应选B。

7. 曲线$y=1+x^3$的拐点是 （　　）
A. $(0,1)$　B. $(1,0)$　C. $(0,0)$　D. $(1,1)$
解：$y''=6x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,1)$，应选A 。

8. 曲线$f(x)=\frac{x^2-2}{3x^2}$的水平渐近线是 （　　）
A. $y=\frac{2}{3}$　B. $y=-\frac{2}{3}$　C. $y=\frac{1}{3}$　D. $y=-\frac{1}{3}$
解：$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{3x^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{3}\Rightarrow C$ 。

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\tan t dt}{x^4}=$ （　　）
A. 0　B. $\frac{1}{2}$　C. 2　D. 1
解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\tan x dx}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\tan x^2}{4x^3}=\frac{1}{2}\Rightarrow B$ 。

10. 若函数$f(x)$是$g(x)$的原函数，则下列等式正确的是 （　　）
A. $\int f(x)dx=g(x)+C$　B. $\int g(x)dx=f(x)+C$
C. $\int g'(x)dx=f(x)+C$　D. $\int f'(x)dx=g(x)+C$
解：根据不定积分与原函数的关系知，$\int g(x)dx=f(x)+C$。应选B。

11. $\int\cos(1-3x)dx=$ （　　）
A. $-\frac{1}{3}\sin(1-3x)+C$　B. $\frac{1}{3}\sin(1-3x)+C$
C. $-\sin(1-3x)+C$　D. $3\sin(1-3x)+C$
解：$\int\cos(1-3x)dx=-\frac{1}{3}\int\cos(1-3x)d(1-3x)=-\frac{1}{3}\sin(1-3x)+C\Rightarrow A$。

12. 设$y=\int_0^x(t-1)(t-3)dt$，则$y'(0)=$ （　　）
A. -3　B. -1　C. 1　D. 3
解：$y'=(x-1)(x-3)\Rightarrow y'(0)=3\Rightarrow D$ 。

13. 下列广义积分收敛的是 （　　）
A. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$　B. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$
C. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$　D. $\int_0^1\frac{dx}{x\sqrt{x}}$

解：由 p 积分和 q 积分的收敛性知，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$ 收敛，应选 C 。

14. 对不定积分 $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$，下列计算结果错误是 （ ）

A. $\tan x-\cot x+C$　　B. $\tan x-\frac{1}{\tan x}+C$

C. $\cot x-\tan x+C$　　D. $-\cot 2x+C$

解：分析结果，就能知道选择 C。

15. 函数 $y=x^2$ 在区间 $[1,3]$ 的平均值为 （ ）

A. $\frac{26}{3}$　　B. $\frac{13}{3}$　　C. 8　　D. 4

解：$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2dx=\frac{x^3}{6}\bigg|_1^3=\frac{13}{3}\Rightarrow B$。

16. 过 Oz 轴及点 $(3,-2,4)$ 的平面方程为 （ ）

A. $3x+2y=0$　　B. $2y+z=0$

C. $2x+3y=0$　　D. $2x+z=0$

解：经过 Oz 轴的平面可设为 $Ax+By=0$，把点 $(3,-2,4)$ 代入得 $2x+3y=0$ 应选 C。也可以把点 $(3,-2,4)$ 代入所给的方程验证，且不含 z 。

17. 双曲线 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转所成的曲面方程为 （ ）

A. $\frac{x^2+y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2+z^2}{4}=1$

C. $\frac{(x+y)^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}-\frac{(y+z)^2}{4}=1$

解：把 $\frac{x^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1$ 中 x^2 换成 x^2+y^2 得 $\frac{x^2+y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1$，应选 A。

18. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}=$ （ ）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $-\frac{1}{6}$　　C. 0　　D. 极限不存在

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-xy}{xy(3+\sqrt{xy+9})}=-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{3+\sqrt{xy+9}}=-\frac{1}{6}\Rightarrow B$ 。

19. 若 $z=x^y$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(e,1)}=$ （ ）

A. $\frac{1}{e}$　　B. 1　　C. e　　D. 0

解：$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(e,1)}=x^y\ln x\big|_{(e,1)}=e\ln e=e\Rightarrow C$ 。

20. 方程 $z^2y-xz^3=1$ 所确定的隐函数为 $z=f(x,y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ （ ）

A. $\frac{z^2}{2y-3xz}$　　B. $\frac{z^2}{3xz-2y}$　　C. $\frac{z}{2y-3xz}$　　D. $\frac{z}{3xz-2y}$

解：令 $F=z^2y-xz^3-1\Rightarrow F'_x=-z^3;F'_z=2zy-3xz^2\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{z^2}{2y-3xz}$，应选 A。

21. 设 C 为抛物线 $y=x^2$ 上从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧，则 $\int_C 2xydx+x^2dy=$ （ ）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

解：C：$\begin{cases}x=x\\ y=x^2\end{cases}$，$x$ 从 0 变到 1，$\int_C 2xydx+x^2dy=\int_0^1 4x^3dx=1\Rightarrow C$ 。

22. 下列正项级数收敛的是 （ ）

A. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$　　B. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

C. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$　　D. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

解：对级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$、$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 需要利用积分判别法，超出大纲范围。级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 有结论：当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散。级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$、$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 与级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 利用比较判别法的极限形式来确定---发散的，应选 C。

23. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(x+1)^n$ 的收敛区间为 （ ）

A. $(-1,1)$　　B. $(-3,3)$　　C. $(-2,4)$　　D. $(-4,2)$

解：令 $x+1=t$，级数化为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}t^n=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^n\Rightarrow$ 收敛区间为 $(-3,3)$，即

$x+1\in(-3,3)\Rightarrow x\in(-4,2)\Rightarrow D$。

24. 微分 $y''+3y'+2y=e^{-x}\cos x$ 特解形式应设为 $y^*=$ (　　)

A. $Ce^{x}\cos x$　　B. $e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

C. $xe^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$　　D. $x^2e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

解：$-1+i$ 不是特征方程的特征根，特解应设为 $e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$。应选 B。

25. 设函数 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''+y'=e^{2x}$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处 (　　)

A. 取极小值　B. 取极大值　C. 不取极值　D. 取最大值

解：有 $f''(x_0)+f'(x_0)=e^{2x_0}\Rightarrow f''(x_0)=e^{2x_0}>0\Rightarrow A$。

得分	评卷人

二、填空题（每题 2 分，共 30 分）

26. 设 $f(x)=2x+5$，则 $f[f(x)-1]=$________.

解：$f[f(x)-1]=2(f(x)-1)+5=2f(x)+3=2(2x+5)+3=4x+13$。

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=$____________.

解：构造级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$，利用比值判别法知它是收敛的，根据收敛级数的必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$。

28. 若函数 $f(x)=\begin{cases}3e^{4x}, & x<0\\ 2x+\dfrac{a}{2}, & x\ge 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$____________.

解：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\dfrac{a}{2};\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=3\Rightarrow a=6$。

29. 已知曲线 $y=x^2+x-2$ 上点 M 处的切线平行于直线 $y=5x-1$，则点 M 的坐标为 ________

解：$y'=2x+1=5\Rightarrow x=2\Rightarrow y=4\Rightarrow M(2,4)$。

30. 设 $f(x)=e^{2x-1}$，则 $f^{(2007)}(0)=$________

解：$f^{(n)}(x)=2^ne^{2x-1}\Rightarrow f^{(2007)}(0)=2^{2007}e^{-1}$。

31. 设 $\begin{cases}x=3t+1\\ y=2t^2-t+1\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=$__________

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4t-1}{3}\Rightarrow\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=1$。

32. 若函数 $f(x)=ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处取得极值 2，则 $a=$______，$b=$_____

解：$f'(x)=2ax+b=0\Rightarrow 2a+b=0$；$a+b=2\Rightarrow a=-2;b=4$。

33. $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=$ _________

解：$\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\dfrac{df(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C$。

34. $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=$_________

解：$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\dfrac14 S_{圆}=\dfrac{\pi}{4}$。

35. 向量 $\vec a=3\vec i+4\vec j-\vec k$ 的模 $|\vec a|=$________

解：$|3\vec i+4\vec j-\vec k|=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}$。

36. 已知平面 π_1：$x+2y-5z+7=0$ 与平面 π_2：$4x+3y+mz+13=0$ 垂直，则 $m=$______

解：$\vec n_1=\{1,2,-5\};\vec n_2=\{4,3,m\}\Rightarrow 4+6-5m=0\Rightarrow m=2$。

37. 设 $f(x+y,xy)=x^2+y^2$，则 $f(x,y)=$________

解：$f(x+y,xy)=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy\Rightarrow f(x,y)=x^2-2y$。

38. 已知 $I=\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$，交换积分次序后，则 $I=$_______

解：$D=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\dfrac{\sqrt2}{2},y\le x\le\sqrt{1-y^2}\right\}$

$=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le\dfrac{\sqrt2}{2},0\le y\le x\right\}+\left\{(x,y)\,|\,\dfrac{\sqrt2}{2}\le x\le1,0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$，

所以次序交换后为 $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$。

39. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 的和为 _______

解：$S_n=\left(\dfrac{1}{u_1}-\dfrac{1}{u_2}\right)+\left(\dfrac{1}{u_2}-\dfrac{1}{u_3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{u_1}-\dfrac{1}{u_{n+1}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_{n+1}}=0$，

所以 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{u_1}$。

40. 微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解为________

解：有二重特征根 1，故通解为 $y=C_1e^x+C_2xe^x$（C_1,C_2 为任意常数）。

得分	评卷人

三、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

你认为正确的在题后括号内划“√”，反之划“×”.

41. 若数列$\{x_n\}$单调，则$\{x_n\}$必收敛. （ ）

解：如数列$\{n\}$单调，但发散，应为×。

42. 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)\neq f(b)$，则一定不存在$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$. （ ）

解：如$y=x^2$在$[-1,3]$满足上述条件，但存在$\xi=0\in[-1,3]$，使得$f'(\xi)=0$，应为×。

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}\overset{\text{由洛比达法则}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{-\sin x}=-1$. （ ）

解：第二步不满足$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$，是错误的，事实上$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1$。应为×。

44. $0\le\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln 2$. （ ）

解：因$0<\sqrt{1-e^{-2x}}<1$，由定积分保序性知：$0\le\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx\le\ln 2\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln 2$，应为√。

45. 函数$f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微是$f(x,y)$在$P(x,y)$处连续的充分条件.（ ）

解：$f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微可得$f(x,y)$在点$P(x,y)$处连续，反之不成立，应为应为√。

得分	评卷人

四、计算题（每小题 5 分，共 40 分）

46. 求$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$.

解：
$$\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\sin x\ln x}\overset{\sin x\sim x}{=\!=}e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=\!=}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}x}=e^0=1。$$

47. 求函数$y=x^2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

解： 两边取自然对数得 $\ln|y|=2\ln|x|+\dfrac{1}{3}[\ln|1-x|-\ln|1+x|]$，----（1 分）

两边对x求导得：$\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{-1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right]$，-------（3 分）

即$y'=y\left[\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{3(x-1)}-\dfrac{1}{3(x+1)}\right]$，------（4 分）

故 $\dfrac{dy}{dx}=x^2\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}\left[\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{3(x-1)}-\dfrac{1}{3(x+1)}\right]$。-----（5 分）

48. 求不定积分$\int[e^{2x}+\ln(1+x)]dx$.

解：$\int[e^{2x}+\ln(1+x)]dx=\dfrac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)+\int\ln(1+x)dx$ ----（1 分）

$=\dfrac{1}{2}e^{2x}+x\ln(1+x)-\int\dfrac{x}{1+x}dx$ -----（3 分）

$=\dfrac{1}{2}e^{2x}+x\ln(1+x)-\int\left[1-\dfrac{1}{1+x}\right]dx$--（4 分）

$=\dfrac{1}{2}e^{2x}+x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)+C$。----（5 分）

49. 计算定积分$\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos 2x}dx$.

解：因$2+2\cos 2x=2(1+\cos 2x)=4\cos^2 x$，所以

$\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos 2x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}2|\cos x|dx$-----（2 分）

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx$------（4 分）

$=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2+2=4$。-----（5 分）

50. 设$z=f(e^x\sin y,3x^2y)$，且$f(u,v)$为可微函数，求dz.

解：令$e^x\sin y=u$，$3x^2y=v$ ，有$z=f(u,v)$，利用微分的不变性得

$dz=f_u'(u,v)du+f_v'(u,v)dv=f_u'd(e^x\sin y)+f_v'd(3x^2y)$----（3 分）

$=f_u'(e^x\sin ydx+e^x\cos ydy)+f_v'(6xydx+3x^2dy)$-------（4 分）

$=(e^x\sin yf_u'+6xyf_v')dx+(e^x\cos yf_u'+3x^2f_v')dy$---（5 分）

51. 计算$\iint\limits_D x^2dxdy$，其中D为圆环区域：$1\le x^2+y^2\le 4$.

解：积分区域D如图 07-1 所示：D的边界$x^2+y^2=1$、$x^2+y^2=4$用极坐标表示分别为$r=1$，$r=2$；故积分区域D在极坐标系下为

$\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi, 1\le r\le 2\}$，----（2 分）

故 $\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^2\cos^2\theta\cdot rdr$ ----（3 分）

$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_1^2 r^3dr=\int_0^{2\pi}\left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2\cos^2\theta d\theta$

$=\frac{15}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\frac{15}{8}\int_0^{2\pi}2\cos^2\theta d\theta$ ---（4 分）

$=\frac{15}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{15}{8}\left.(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)\right|_0^{2\pi}=\frac{15\pi}{4}$。---（5 分）

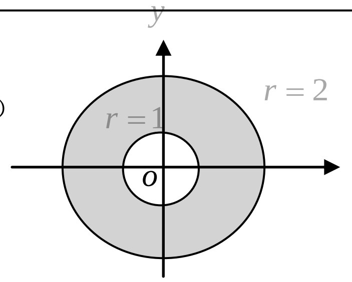

图 07-1

52．将 $\frac{2x}{4-x^2}$ 展开为 x 的幂级数，并写出收敛区间.

解：因 $\frac{2x}{4-x^2}=\frac{1}{2-x}-\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2(1-\frac{x}{2})}-\frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}$；---（2 分）

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad x\in(-1,1)$。

所以 $\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad x\in(-2,2)$；$\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n \quad x\in(-2,2)$。--（3 分）

故 $\frac{2x}{4-x^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n \quad x\in(-2,2)$ --（4 分）

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}x^{2n+1} \quad x\in(-2,2)$。--（5 分）

53．求微分方程 $x^2dy+(y-2xy-x^2)dx=0$ 的通解.

解：方程可化为 $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$，这是一阶线性非齐次微分方程，---（1 分）

它对应的齐次方程 $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=0$ 的通解为 $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}$，---（2 分）

设原方程有通解 $y=C(x)x^2e^{\frac{1}{x}}$，代入方程得 $C'(x)x^2e^{\frac{1}{x}}=1$，

即 $C'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$，--（3 分）

所以 $C(x)=\int\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx=e^{-\frac{1}{x}}+C$，---（4 分）

故所求方程的通解为 $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$。---（5 分）

得分	评卷人

五、应用题（每题 7 分，共计 14 分）

54．某工厂欲建造一个无盖的长方题污水处理池，设计该池容积为 V 立方米，底面造价每平方米 a 元，侧面造价每平方米 b 元,问长、宽、高各为多少米时，才能使污水处理池的造价最低？

解：设长方体的长、宽分别为 x,y，则高为 $\frac{V}{xy}$，又设造价为 z，---（1 分）

由题意可得

$z=axy+2b(x+y)\frac{V}{xy}=axy+\frac{2bV}{y}+\frac{2bV}{x} \quad (x>0,y>0)$；---（3 分）

而 $\frac{\partial z}{\partial x}=ay-\frac{2bV}{x^2}$；$\frac{\partial z}{\partial y}=ax-\frac{2bV}{y^2}$；在定义域内都有意义.

令 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=ay-\frac{2bV}{x^2}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=ax-\frac{2bV}{y^2}=0\end{cases}$ 得唯一驻点 $x=y=\sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}$，-----（5 分）

由题可知造价一定在内部存在最小值，故 $x=y=\sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}$ 就是使造价最小的取值，此时高为 $\sqrt[3]{\frac{aV^2}{2b}}$。

所以，排污无盖的长方体的长、宽、高分别为 $\sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}$、$\sqrt[3]{\frac{2bV}{a}}$、$\sqrt[3]{\frac{aV^2}{2b}}$ 时，工程造价最低。---（7 分）

55．设平面图形 D 由曲线 $y=e^x$，直线 $y=e$ 及 y 轴所围成．求：

（1）平面图形 D 的面积；

（2）平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解：平面图形 D 如图 07-2 所示：---（1 分）

取 x 为积分变量，且 $x\in[0,1]$

（1）平面图形 D 的面积为

$S=\int_0^1(e-e^x)dx$ ----（3 分）

$=\left.(ex-e^x)\right|_0^1=1$。----（4 分）

（2）平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所生成

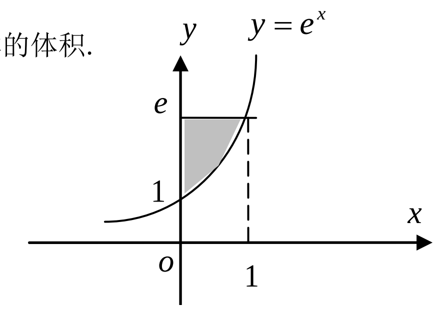

图 07-2

旋转体的体积为

$$V_y=2\pi\int_0^1 x\left[e-e^x\right]dx=2\pi e\int_0^1 xdx-2\pi\int_0^1 xe^x dx$$

$$=2\pi e\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-2\pi\int_0^1 xde^x=\pi e-2\pi xe^x\Big|_0^1+2\pi\int_0^1 e^x dx$$

$$=\pi e-2\pi e+2\pi e^x\Big|_0^1=\pi(e-2)$$ 。-----（7 分）

或 $$V_y=\pi\int_1^e(\ln y)^2dy=\pi(\ln y)^2y\Big|_1^e-\pi\int_1^e 2\ln ydy$$

$$=\pi e-2\pi\int_1^e\ln ydy=\pi e-2\pi y\ln y\Big|_1^e+2\pi\int_1^e dy$$

$$=\pi e-2\pi e+2\pi(e-1)=\pi(e-2)$$ 。

得分	评卷人

六、证明题（6 分）

56. 若 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在两个常数 m 与 M，对于满足 $a\le x_1<x_2\le b$ 的任意两点 x_1,x_2，证明恒有

$$m(x_2-x_1)\le f(x_2)-f(x_1)\le M(x_2-x_1).$$

证明： 因 $f'(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 有意义，从而 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续且可导，即 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，-----（2 分）

故存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$，----（3 分）

又因 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据连续函数在闭区间上最值定理知，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上既有最大值又有最小值，不妨设 m,M 分别是最小值和最大值，从而 $x\in(a,b)$ 时，有 $m\le f'(x)\le M$ 。------（5 分）

即 $m\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le M$，

故 $m(x_2-x_1)\le f(x_2)-f(x_1)\le M(x_2-x_1)$ 。---（6 分）