2006年河南省普通高等学校

选拔优秀专科生进入本科阶段学习考试

《高等数学》试卷

题号	一	二	三	四	五	六	总分	核分人
分数								

得分	评卷人

一、单项选择题（每小题2分，共计60分）

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案，并将其代码写在题干后面的括号内。不选、错选或多选者，该题无分.

1. 已知函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $[0,1]$ ，则 $f(x)$ 的定义域为　（　　）

A. $[\frac{1}{2},1]$　B. $[-1,1]$　C. $[0,1]$　D. $[-1,2]$

解：$0\le x\le 1\Rightarrow -1\le 2x-1\le 1\Rightarrow B$.

2. 函数 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是　（　　）

A. 奇函数　B. 偶函数　C. 非奇非偶函数　D. 既奇又偶函数

解：$f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln 1=0\ \Rightarrow A$.

3. 当 $x\to 0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 x 的　（　　）

A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小 C. 同阶非等价无穷小 D. 等价无穷小

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin x}{x}=-1\Rightarrow C$.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3\sin n}{n}=$　（　　）

A. ∞　B. 2　C. 3　D. 5

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3\sin n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}[2+3\dfrac{\sin n}{n}]=2\Rightarrow B$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2ax}-1}{x},x\neq 0\\ a+1,x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 常数 $a=$　（　　）

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

解：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2ae^{2ax}=2a=a+1\Rightarrow a=1\Rightarrow B$.

6. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导 ，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+2x)-f(1-x)}{x}=$　（　　）

A. $f'(1)$　B. $2f'(1)$　C. $3f'(1)$　D. $-f'(1)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+2x)-f(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+2x)-f(1)+f(1)-f(1-x)}{x}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+2x)-f(1)}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=3f'(1)\Rightarrow C$

7. 若曲线 $y=x^2+1$ 上点 M 处的切线与直线 $y=4x+1$ 平行，则点 M 的坐标（　　）

A. （2，5）　B. （-2，5）　C. （1，2）　D.（-1，2）

解：$y'=2x\Rightarrow 2x_0=4\Rightarrow x_0=2,y_0=5\Rightarrow A$.

8. 设 $\begin{cases}x=\int_0^t\sin u^2du\\ y=\cos t^2\end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$　（　　）

A. t^2　B. $2t$　C. $-t^2$　D. $-2t$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2t\sin t^2}{\sin t^2}=-2t\Rightarrow D$.

9. 设 $y^{(n-2)}=x\ln x(n>2$，为正整数)，则 $y^{(n)}=$　（　　）

A. $(x+n)\ln x$　B. $\dfrac{1}{x}$　C. $(-1)^n\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$　D. 0

解：$y^{(n-2)}=x\ln x\Rightarrow y^{(n-1)}=1+\ln x\Rightarrow y^{(n)}=\dfrac{1}{x}\Rightarrow B$.

10. 曲线 $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}$　（　　）

A. 有一条水平渐近线，一条垂直渐近线　B. 有一条水平渐近线，两条垂直渐近线
C. 有两条水平渐近线，一条垂直渐近线，　D. 有两条水平渐近线，两条垂直渐近线

解：$y=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x+2)}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=1,\lim\limits_{x\to -1}y=-4,\lim\limits_{x\to -2}y=\infty\Rightarrow A$.

11. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理的条件是　（　　）

A. $y=|x-1|,[0,2]$　B. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}},[0,2]$

C. $y=x^2-3x+2,[1,2]$　D. $y=x\arcsin x,[0,1]$

解：由罗尔中值定理条件：连续、可导及端点的函数值相等$\Rightarrow C$.

12. 函数 $y=e^{-x}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内　（　　）

A. 单调递增且图像是凹的曲线　B. 单调递增且图像是凸的曲线
C. 单调递减且图像是凹的曲线　D. 单调递减且图像是凸的曲线

解：$y'=-e^{-x}<0,y''=e^{-x}>0\Rightarrow C$.

13. 若 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx=$　（　　）

A. $e^{-x}+F(e^{-x})+C$　B. $F(e^{-x})+C$

C. $e^{-x}-F(e^{-x})+C$ D. $-F(e^{-x})+C$

解：$\int e^{-x}f(e^{-x})dx=-\int f(e^{-x})d(e^{-x})=-F(e^{-x})+C\Rightarrow D$.

14. 设 $f(x)$ 为可导函数，且 $f'(2x-1)=e^x$ ，则 $f(x)=$ （ ）

A. $\frac{1}{2}e^{2x-1}+C$ B. $2e^{\frac{1}{2}(x+1)}+C$

C. $\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$ D. $2e^{\frac{1}{2}(x-1)}+C$

解：$f'(2x-1)=e^x\Rightarrow f'(x)=e^{\frac{1}{2}(x+1)}\Rightarrow f(x)=2e^{\frac{1}{2}(x+1)}+C\Rightarrow B$.

15. 导数 $\frac{d}{dx}\int_a^b \arcsin t dt=$ （ ）

A. $\arcsin x$ B. 0 C. $\arcsin b-\arcsin a$ D. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

解：$\int_a^b \arcsin x dx$ 是常数，所以 $\frac{d}{dx}\int_a^b \arcsin x dx=0\Rightarrow B$.

16. 下列广义积分收敛的是 （ ）

A. $\int_1^{+\infty}e^x dx$ B. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ C. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{4+x^2}dx$ D. $\int_1^{+\infty}\cos x dx$

解：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{4+x^2}dx=\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{2})\Rightarrow C$.

17. 设区域 D 由 $x=a,x=b(b>a),,y=f(x),y=g(x)$ 所围成，则区域 D 的面积为 （ ）

A. $\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$ B. $\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]dx\right|$

C. $\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$ D. $\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$

解：由定积分的几何意义可得 D 的面积为 $\int_a^b|f(x)-g(x)|dx\Rightarrow D$.

18. 若直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{n}=\frac{z-2}{3}$ 与平面 $3x-4y+3z+1=0$ 平行，则常数 $n=$ （ ）

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

解：$\{1,n,3\}\perp\{3-4,3\}\Rightarrow 3-4n+9=0\Rightarrow n=3\Rightarrow B$.

19. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$ ，则偏导数 $f'_x(x,1)$ 为 （ ）

A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

解：$f(x,1)=x\Rightarrow f'_x(x,1)=1\Rightarrow B$.

20. 设方程 $e^{2z}-xyz=0$ 确定了函数 $z=f(x,y)$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ = （ ）

A. $\frac{z}{x(2z-1)}$ B. $\frac{z}{x(2z+1)}$ C. $\frac{y}{x(2z-1)}$ D. $\frac{y}{x(2z+1)}$

解：令 $F(x,y,z)=e^{2z}-xyz\Rightarrow F'_x=-yz,F'_z=2e^{2z}-xy$

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{2e^{2z}-xy}=\frac{yz}{2xyz-xy}=\frac{z}{x(2z-1)}\Rightarrow A.$$

21. 设函数 $z=x^2y+\frac{y}{x}$ ，则 $dz\big|_{\substack{x=1\\y=1}}=$ （ ）

A. $dx+2dy$ B. $dx-2dy$ C. $2dx+dy$ D. $2dx-dy$

解：$dz=2xydx+x^2dy+\frac{xdy-ydx}{x^2}$

$$\Rightarrow dz\big|_{\substack{x=1\\y=1}}=2dx+dy+dy-dx=dx+2dy\Rightarrow A.$$

22. 函数 $z=2xy-3x^2-3y^2+20$ 在定义域上内 （ ）

A. 有极大值，无极小值 B. 无极大值，有极小值

C. 有极大值，有极小值 D. 无极大值，无极小值

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2y-6x=0,\frac{\partial z}{\partial y}=2x-6y=0\Rightarrow(x,y)=(0,0)\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-6,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\Rightarrow$ 是极大值 $\Rightarrow A$.

23 设 D 为圆周由 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 围成的闭区域 ，则 $\iint_D dxdy=$ （ ）

A. π B. 2π C. 4π D. 16π

解：有二重积分的几何意义知：$\iint_D dxdy=$ 区域 D 的面积为 π.

24. 交换二次积分 $\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy(a>0$，常数）的积分次序后可化为 （ ）

A. $\int_0^a dy\int_0^y f(x,y)dx$ B. $\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)dx$

C. $\int_0^a dy\int_0^a f(x,y)dx$ D. $\int_0^a dy\int_a^y f(x,y)dx$

解： 积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le a,0\le y\le x\}=\{(x,y)\,|\,0\le y\le a,y\le x\le a\}$ $\Rightarrow B$.

25. 若二重积分 $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$，则积分区域 D 为

（　　）

A. $x^2+y^2\le 2x$　　B. $x^2+y^2\le 2$

C. $x^2+y^2\le 2y$　　D. $0\le x\le\sqrt{2y-y^2}$

解：在极坐标下积分区域可表示为：$D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\sin\theta\}$，在直角坐标系下边界方程为 $x^2+y^2=2y$，积分区域为右半圆域 $\Rightarrow D$

26. 设 L 为直线 $x+y=1$ 上从点 $A(1,0)$ 到 $B(0,1)$ 的直线段，则 $\int_L (x+y)dx-dy=$ （　　）

A. 2　　B. 1　　C. −1　　D. −2

解：$L:\begin{cases}x=x\\ y=1-x\end{cases}$，$x$ 从 1 变到 0，$\int_L (x+y)dx-dy=\int_1^0 dx+dx=-2\Rightarrow D$.

27. 下列级数中，绝对收敛的是　（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n^2}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\pi$

解：$\sin\frac{\pi}{n^2}<\frac{\pi}{n^2}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow C$.

28. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ (a_n 为常数 $n=0,1,2,\cdots$)，在点 $x=-2$ 处收敛，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n$ （　　）

A. 绝对收敛　B. 条件收敛　C. 发散　D. 敛散性不确定

解：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-2$ 收敛，则在 $x=-1$ 绝对收敛，即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n$ 绝对收敛 $\Rightarrow A$.

29. 微分方程 $\sin x\cos y dy+\cos x\sin y dx=0$ 的通解为　（　　）

A. $\sin x\cos y=C$　　B. $\cos x\sin y=C$

C. $\sin x\sin y=C$　　D. $\cos x\cos y=C$

解：$\sin x\cos y dy+\cos x\sin y dx=0\Rightarrow\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\frac{\cos x}{\sin x}dx$

$\Rightarrow\frac{d\sin y}{\sin y}=-\frac{d\sin x}{\sin x}\Rightarrow\ln\sin y+\ln\sin x=\ln C\Rightarrow\sin x\sin y=C\Rightarrow C$.

30. 微分方程 $y''+y'-2y=xe^{-x}$ 的特解用特定系数法可设为　（　　）

A. $y^*=x(ax+b)e^{-x}$　　B. $y^*=x^2(ax+b)e^{-x}$

C. $y^*=(ax+b)e^{-x}$　　D. $y^*=axe^{-x}$

解：−1 不是微分方程的特征根，x 为一次多项式，可设 $y^*=(ax+b)e^{-x}$ $\Rightarrow C$.

得分	评卷人

二、填空题（每小题 2 分，共 30 分）

31. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\le 1\\ 0,|x|>1\end{cases}$，则 $f(\sin x)=$________.

解：$|\sin x|\le 1\Rightarrow f(\sin x)=1$.

32. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3}}{x^2-2x}==$__________.

解：$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3}}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)}{x(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=$

$=\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

33. 设函数 $y=\arctan 2x$，则 $dy=$________.

解：$dy=\frac{2}{1+4x^2}dx$.

34. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=-1$ 处取得极小值−2，则常数 a和b 分别为________.

解：$f'(x)=3x^2+2ax+b\Rightarrow 3-2a+b=0,-2=-1+a-b\Rightarrow a=4,b=5$.

35. 曲线 $y=x^3-3x^2+2x-1$ 的拐点为 ________.

解：$y'=3x^2-6x+2\Rightarrow y''=6x-6=0\Rightarrow(x,y)=(1,-1)$.

36. 设函数 $f(x),g(x)$ 均可微，且同为某函数的原函数，有 $f(1)=3,g(1)=1$ 则 $f(x)-g(x)=$________.

解：$f(x)-g(x)=C\Rightarrow C=f(1)-g(1)=2\Rightarrow f(x)-g(x)=2$.

37. $\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+\sin^3x)dx=$ ________.

解：$\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+\sin^3x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3xdx=2\int_0^{\pi}x^2dx+0=\frac{2\pi^3}{3}$.

38. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\ge 0\\ x^2,x<0\end{cases}$，则 $\int_0^2 f(x-1)dx=$________.

解：$\int_0^2 f(x-1)dx\overset{x-1=t}{=\!=\!=\!=}\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 x^2dx+\int_0^1 e^xdx=e-\frac{2}{3}$.

39. 向量 $\vec{a}=\{1,1,2\}$与向量$\vec{b}=\{2,-1,1\}$ 的夹角为________.

解：$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{3}$.

40. 曲线 $L:\begin{cases}y^2=2x\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为 ________.

解：把 $y^2=2x$ 中的 y^2 换成 z^2+y^2，即得所求曲面方程 $z^2+y^2=2x$.

41. 设函数 $z=xy+x^2\sin y$ ，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+2x\sin y\Rightarrow\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1+2x\cos y$.

42. 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$，则 $\iint\limits_D(y-x^2)dxdy=$________ .

解：$\iint\limits_D(y-x^2)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-1}^1(y-x^2)dy=-2\int_0^1 x^2dx=-\dfrac{2}{3}$.

43. 函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 在 $x_0=0$ 处展开的幂级数是________________.

解：$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}\Rightarrow f(x)=e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x^2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$.

44. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$ 的和函数为 ________.

解：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(\frac{x}{2})^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(\frac{x}{2})^n}{n}=\ln(1+\dfrac{x}{2})$，$(-2<x\le 2)$.

45. 通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$（C_1、C_2 为任意常数）的二阶线性常系数齐次微分方程为________.

解：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=3\Rightarrow\lambda^2-2\lambda-3=0$
$\Rightarrow y''-2y'-3y=0$.

得分	评卷人

三、计算题（每小题 5 分，共 40 分）

46. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{8x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x+2xe^{-x^2}}{32x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{16x^2}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2xe^{-x^2}}{32x}=-\dfrac{1}{16}\lim\limits_{x\to 0}e^{-x^2}=-\dfrac{1}{16}$.

47. 求函数 $y=(x^2+3x)^{\sin 2x}$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：取对数得 ：$\ln y=\sin 2x\ln(x^2+3x)$，

两边对 x 求导得：$\dfrac{1}{y}y'=2\cos 2x\ln(x^2+3x)+\dfrac{2x+3}{x^2+3x}\sin 2x$

所以 $y'=(x^2+3x)^{\sin 2x}[2\cos 2x\ln(x^2+3x)+\dfrac{2x+3}{x^2+3x}\sin 2x]$

$=2(x^2+3x)^{\sin 2x}\cos 2x\ln(x^2+3x)+(x^2+3x)^{\sin 2x-1}(2x+3)\sin 2x$.

48. 求不定积分 $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

解：$\int\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx\overset{x=2\sin t}{\underset{-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}}{=\!=\!=\!=}}\int\dfrac{4\sin^2 t}{2\cos t}2\cos tdt=4\int\sin^2 tdt=2\int(1-\cos 2t)dt$

$=2t-\sin 2t+C=2\arcsin\dfrac{x}{2}-2\sin t\cos t+C=2\arcsin\dfrac{x}{2}-\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C$.

49. 计算定积分 $\int_{-0}^{1}\dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$.

解：$\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\int_0^1\ln(1+x)d\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{1}{(2-x)(1+x)}dx$

$=\ln 2-\dfrac{1}{3}\int_0^1(\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{1+x})dx=\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{2-x}{1+x}\right|_0^1=\ln 2-\dfrac{2}{3}\ln 2=\dfrac{1}{3}\ln 2$.

50. 设 $z=f(2x+y)+g(x,xy)$ ，其中 $f(t),g(u,v)$ 皆可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(2x+y)\dfrac{\partial(2x+y)}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$
$=2f'(2x+y)+g_u'(x,xy)+yg_v'(x,xy)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(2x+y)\dfrac{\partial(2x+y)}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=f'(2x+y)+xg_v'(x,xy)$.

51. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D x^2ydxdy$，

其中 D 由 $y=x,y=2x及x=1$所围成.

解：积分区域如图 06-1 所示，

可表示为：$0\le x\le 1, x\le y\le 2x$.

所以 $I=\iint\limits_D x^2ydxdy=\int_0^1dx\int_x^{2x}x^2ydy$

$=\int_0^1x^2dx(\frac{y^2}{2})\Big|_x^{2x}=\frac{3}{2}\int_0^1x^4dx=\frac{3}{10}x^5\Big|_0^1=\frac{3}{10}$.

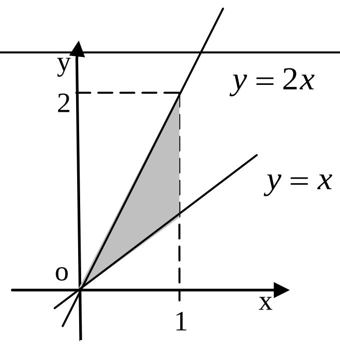

图 06-1

52．求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+(-3)^n}(x-1)^n$的收敛区间（不考虑区间端点的情况）.

解： 令$x-1=t$，级数化为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+(-3)^n}t^n$，这是不缺项的标准的幂级数.

因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1+(-3)^n}{1+(-3)^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(-3)^n}+1}{\frac{1}{(-3)^n}-3}\right|=\frac{1}{3}$,

故级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+(-3)^n}t^n$的收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=3$，即级数收敛区间为（-3，3）.

对级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+(-3)^n}(x-1)^n$有$-3<x-1<3$，即$-2<x<4$.

故所求级数的收敛区间为$(-2,4)$.

53．求微分方程 $x^2dy+(2xy-x+1)dy=0$通解.

解：微分方程$x^2dy+(2xy-x+1)dx=0$可化为 $y'+\frac{2}{x}y=\frac{1-x}{x^2}$，这是一阶线性微分方程，它对应的齐次线性微分方程$y'+\frac{2}{x}y=0$通解为$y=\frac{C}{x^2}$.

设非齐次线性微分方程的通解为$y=\frac{C(x)}{x^2}$，则$y'=\frac{xC'(x)-2C(x)}{x^3}$，代入方程得

$C'(x)=1-x\Rightarrow C(x)=x-\frac{x^2}{2}+C$.

故所求方程的通解为$y=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{C}{x^2}$.

得分	评卷人

四、应用题（每小题 7 分，共计 14 分）

54. 某公司的甲、乙两厂生产同一种产品，月产量分别为x,y千件；甲厂月生产成本是$C_1=x^2-2x+5$（千元），乙厂月生产成本是$C_2=y^2+2y+3$（千元）. 若要求该产品每月总产量为 8 千件，并使总成本最小，求甲、乙两厂最优产量和相应最小成本.

解：由题意可知：总成本$C=C_1+C_2=x^2+y^2-2x+2y+8$，

约束条件为$x+y=8$.

问题转化为在$x+y=8$条件下求总成本C的最小值 .

把$x+y=8$代入目标函数得 $C=2x^2-20x+88(x>0$的整数）.

则$C'=4x-20$，令$C'=0$得唯一驻点为$x=5$，此时有$C''=4>0$.

故 $x=5$是唯一极值点且为极小值，即最小值点. 此时有$y=3,C=38$.

所以 甲、乙两厂最优产量分别为 5 千件和 3 千件，最低成本为 38 千元.

55. 由曲线$y=(x-1)(x-2)$和x轴所围成一平面图形, 求此平面图形绕y轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解：平面图形如图 06-2 所示, 此立体可看作 X 型区域绕y轴旋转一周而得到。

利用体积公式$V_y=2\pi\int_a^b x|f(x)|dx$.

显然，抛物线与x两交点分别为（1，0）、（2，0），平面图形在x轴的下方.

故 $V_y=2\pi\int_a^b x|f(x)|dx$

$=-2\pi\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$

$=-2\pi\int_1^2(x^3-3x^2+2x)dx$

$=-2\pi(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2)\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}$.

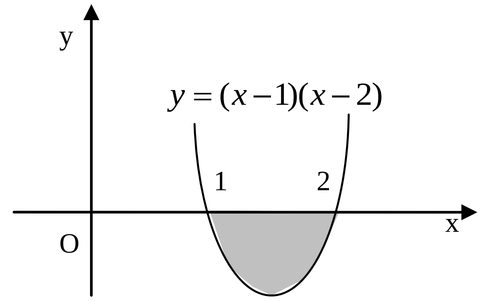

图 06-2

得分	评卷人

五、证明题（6 分）

56. 设$f(x)$在$[-a,a]$（$a>0$，为常数）上连续， 证明：

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx.$$

并计算$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+e^{-x}}dx$.

证明：因为$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_{-a}^{0}f(x)dx$，

而$\int_{-a}^{0}f(x)dx\overset{x=-t}{=\!=\!=\!=}\int_a^0 f(-t)d(-t)=\int_0^a f(-t)dt=\int_0^a f(-x)dx$，

故$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(-x)dx$

即有 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$.

利用上述公式有

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+e^{-x}}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cos x}{1+e^{-x}}+\frac{\cos(-x)}{1+e^{x}}\right]dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\left[\frac{e^{x}}{1+e^{x}}+\frac{1}{1+e^{x}}\right]dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx = \sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$